Секулярни пертурбации на планетите от Слънчевата система

След усредняване по бързите променливи $l_1, \dots, l_8$ – средните аномалии на планетите от слънчевата система, получаваме усреднения хамилтониан. За простота полагаме константата $\gamma_k = \frac{1}{m_k^2}$:

$$
\begin{aligned}
\langle H \rangle \;\approx\; & \sum_{s=0}^{8} \frac{1}{2m_s L_s^2} - \sum_{0 \le j < s \le 8} \frac{\mathcal{G} m_j m_s}{L_j L_s} \Big[A_0(a_j, a_s) + \\
& + \frac{B_1(a_j, a_s)}{4} (e_j^2 + e_s^2 - i_j^2 + i_s^2 + 2 i_j i_s \cos(\theta_j - \theta_s)) - \\
& - \frac{B_2(a_j, a_s)}{4} e_j e_s \cos(\theta_s + g_s - \theta_j - g_j) \Big]
\end{aligned}
$$

където $\mathcal{G}$ е гравитационната константа, а A_0, B_1 и B_2 са елиптични интеграли:

$$
\begin{aligned}
A_0 &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(\frac{a_j}{a_s} + \frac{a_s}{a_j} - 2\cos\varphi)^3}} \,, \\
B_k &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\varphi \, d\varphi}{\sqrt{(\frac{a_j}{a_s} + \frac{a_s}{a_j} - 2\cos\varphi)^3}} \,,
\end{aligned}
$$

с точност $O_3(e_j, e_s, i_j, i_s)$.

Теорема. *Една слънчева година (времето, за което Слънцето прави една пълна обиколка около центъра на тежестта на слънчевата система) е равна на годината на Юпитер. Тоест,* $\frac{2\pi}{l_0} = \frac{2\pi}{l_5}$.

Доказателство. Нека прекараме мислена равнина през центъра на тежестта и перпендикулярна на Юпитер. Дори в най-лошия случай, когато всички планети са в една равнина, Юпитер е от едната страна на построената от нас равнина, а всички останали планети са от другата - дори тогава Слънцето и Юпитер са в различни полуравнини.

Наистина, от една страна,

$$\sum_{j=0}^{8} m_j x_j \;=\; 0 \,. \tag{1}$$

От друга страна,

$$m_5 a_5 (1 - e_5) \;>\; \sum_{s \neq 0,5} m_s a_s (1 + e_s)$$

и, за да е изпълнено (1), трябва $x_0 < 0$. Стигаме до извода, че Юпитер и Слънцето винаги са в различни полуравнини и следователно времето, за което те правят една пълна обиколка, около центъра на тежестта е еднакво.

Теоремата е доказана.

Нека сега запишем усреднения хамилтониан с елементите на Поанкаре:

$$\begin{aligned}\langle H\rangle \;\approx\; & \sum_{s=0}^{8}\frac{1}{2m_sL_s^2}-\sum_{0\le j<s\le 8}\frac{\mathcal{G}m_jm_s}{L_jL_s}\Big[\,A_0(a_j,a_s)+\\ & +\frac{B_1(a_j,a_s)}{4}\Big(\frac{\xi_j^2+\eta_j^2}{L_j}+\frac{\xi_s^2+\eta_s^2}{L_s}-\frac{p_j^2+q_j^2}{L_j}-\frac{p_s^2+q_s^2}{L_s}+\frac{2(p_jp_s+q_jq_s)}{\sqrt{L_j}\sqrt{L_s}}\Big)\\ & -\frac{B_2(a_j,a_s)}{2}\frac{\xi_j\xi_s+\eta_j\eta_s}{\sqrt{L_j}\sqrt{L_s}}\Big]\,.\end{aligned}$$

По-подробно, използваме смените

$$\begin{aligned}\xi_s &\approx \sqrt[4]{a_s}\cos(g_s+\theta_s)e_s=\sqrt{L_s}\cos(g_s+\theta_s)e_s\\ \eta_s &\approx -\sqrt[4]{a_s}\sin(g_s+\theta_s)e_s=-\sqrt{L_s}\sin(g_s+\theta_s)e_s\ ,\end{aligned}$$

откъдето

$$\xi_s^2+\eta_s^2=L_se_s^2 \qquad \text{и} \qquad e_s^2=\frac{\xi_s^2+\eta_s^2}{L_s}\ .$$

Аналогично, за p и q,

$$\begin{aligned}p_s &\approx \sqrt[4]{a_s}\cos(\theta_s)i_s=\sqrt{L_s}\cos(\theta_s)i_s\ ,\\ q_s &\approx -\sqrt[4]{a_s}\sin(\theta_s)i_s=-\sqrt{L_s}\sin(\theta_s)i_s\ ,\\ p_s^2+q_s^2&=L_si_s^2 \qquad \text{и} \qquad i_s^2=\frac{p_s^2+q_s^2}{L_s}\ .\end{aligned}$$

Умножаваме p_j и p_s, после събираме с q_jq_s и прилагаме формулата за събиране на косинуси:

$$\begin{aligned}p_jp_s &= \sqrt{L_j}\sqrt{L_s}i_ji_s\cos(\theta_j)\cos(\theta_s)\\ q_jq_s &= \sqrt{L_j}\sqrt{L_s}i_ji_s\sin(\theta_j)\sin(\theta_s)\\ p_jp_s+q_jq_s &= \sqrt{L_j}\sqrt{L_s}i_ji_s(\cos(\theta_j)\cos(\theta_s)+\sin(\theta_j)\sin(\theta_s))\\ &= \sqrt{L_j}\sqrt{L_s}i_ji_s\cos(\theta_j-\theta_s)\\ &\Rightarrow\ 2i_ji_s\cos(\theta_j-\theta_s)=\frac{2(p_jp_s+q_jq_s)}{\sqrt{L_j}\sqrt{L_s}}\end{aligned}$$

Аналогично, след като умножим и съберем $\xi_j,\xi_s,\eta_j,\eta_s$, получаваме

$$e_je_s\cos(\theta_s+g_s-\theta_j-g_j) \;=\; \frac{\xi_j\xi_s+\eta_j\eta_s}{\sqrt{L_j}\sqrt{L_s}}\,.$$

Секулярните уравнения приемат следния вид (за простота на записа изпускаме означението за усредняване):

$$\dot{L}_s = -\frac{\partial \langle H\rangle^\lambda}{\partial \lambda_s} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_s = \sqrt{a_s} = const\ . \tag{2}$$

Забележка: Диференциалът $d\lambda = d(l+g+\theta) \approx dl$, което означава, че усредняването по l и усредняването λ дава един и същ резултат.

Секулярните уравнения за останалите пет групи от променливи на Делоне имат вида:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_s &= \frac{\partial \langle H\rangle^\lambda}{\partial L_s}\,,\\
\dot{\xi}_s &= -\frac{\partial \langle H\rangle}{\partial \eta_s} = \sum_{j\neq s} \frac{\mathcal{G} m_j m_s}{L_j L_s}\Big[\,\frac{B_1(a_j,a_s)}{2}\frac{\eta_s}{L_s} - \frac{B_2(a_j,a_s)}{2}\frac{\eta_j}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}}\,\Big]\,,\\
\dot{\eta}_s &= \frac{\partial \langle H\rangle}{\partial \xi_s} = -\sum_{j\neq s} \frac{\mathcal{G} m_j m_s}{L_j L_s}\Big[\,\frac{B_1(a_j,a_s)}{2}\frac{\xi_s}{L_s} - \frac{B_2(a_j,a_s)}{2}\frac{\xi_j}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}}\,\Big]\,,\\
\dot{p}_s &= -\frac{\partial \langle H\rangle}{\partial q_s} = \sum_{j\neq s} \frac{\mathcal{G} m_j m_s}{L_j L_s}\frac{B_1(a_j,a_s)}{2}\Big[\,-\frac{q_s}{L_s} + \frac{q_j}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}}\,\Big]\,,\\
\dot{q}_s &= \frac{\partial \langle H\rangle}{\partial p_s} = -\sum_{j\neq s} \frac{\mathcal{G} m_j m_s}{L_j L_s}\frac{B_1(a_j,a_s)}{2}\Big[\,\frac{p_s}{L_s} - \frac{p_j}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}}\,\Big]\,,
\end{aligned}$$

за $s = 0, \ldots, 8$.

Така получаваме две независими системи (за p и q и за ξ и η) от по 18 линейни хомогенни обикновени диференциални уравнения с постоянни коефициенти.

Боян Иванов, chimera@mail.bg
Добромир Върбанов, dobri_varbanov@abv.bg
Михаела Игнатова, mihaela_ignatova@hotmail.com