Секулярни пертурбации

Нека да си функцията на Хамилтън H посредством равенството:

$$H \quad := \quad \underbrace{-\sum_{s=0}^{8} \frac{m_s^3\,\gamma_s^2}{2\,L_s^2}}_{\substack{\text{непертурби-}\\ \text{рана част}}} \;+\; \underbrace{\left[\sum_{s=0}^{8} \frac{m_s\,\gamma_s}{|r_s|} - \sum_{0\le i<j\le 8} \frac{\mathcal{G}\,m_i\,m_j}{|r_i\,-\,r_j|}\right]}_{\text{пертурбация}}, \tag{1}$$

където $r_i \;=\; r_i\,(L_i, G_i, \Theta_i, l_i, g_i, \theta_i)$.

Усредняване на H. Целта на усредняването е да се замени периодичното движение, относно част от променливите, а именно бързите променливи, с постоянно движение. Понеже g_i и θ_i са бавни променливи, ще усредним само по l_i :

$$\begin{aligned}
\left\langle H\right\rangle^l \quad &:= \quad \frac{1}{(2\pi)^9} \;\underbrace{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}}_{8\ \text{интегрирания}} H\,dl_1\cdots dl_8 \\
&= \quad \left\{\begin{matrix}\text{свободният член от развитието на} \\ H \text{ по } l\text{-овете в ред на Фурие}\end{matrix}\right\} \\
&= \quad -\sum_{s=0}^{8} \frac{m_s^3\,\gamma_s^2}{2\,L_s^2} \;+\; \sum_{s=0}^{8} \frac{m_s\,\gamma_s}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl_s}{|\,r_s|} \;-\; \sum_{0\le i<j\le 8} \frac{\mathcal{G}\,m_i\,m_j}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{dl_i\,dl_j}{|r_i\,-\,r_j|}\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Тъй като изразяването на r_i и r_j чрез l_i и l_j се реализира посредством безкрайни редове с коефициенти функции на Бесел, то по-удобно е да работим с ексцентричните аномалии u_s. От уравнението на Кеплер имаме:

$$\begin{aligned}
l_s \quad &= \quad u_s \,-\, e_s\,\sin\,u_s\,, \\
dl_s \quad &= \quad (\,1\,-\,e_s\,\cos\,u_s\,)\,du_s\,, \\
|\,r_s| \quad &= \quad a_s\,(\,1\,-\,e_s\,\cos\,u_s\,)\,.
\end{aligned}$$

Използвайки факта, че $L_s \;=\; m_s\,\sqrt{\gamma_s}\,\sqrt{a_s}$, комбинираме непертурбирания хамилтониан с първата част от пертурбацията:

$$\begin{aligned}
-\sum_{s=0}^{8} \frac{m_s^3\,\gamma_s^2}{2\,L_s^2} + \sum_{s=0}^{8} \frac{m_s\,\gamma_s}{|r_s|} \quad &= \quad -\sum_{s=0}^{8} \frac{m_s^3\,\gamma_s^2}{2\,L_s^2} + \sum_{s=0}^{8} \frac{m_s\gamma_s}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e_s\cos u_s)\,du_s}{a_s(1-e_s\cos u_s)} \\
&= \quad -\sum_{s=0}^{8} \frac{m_s^3\,\gamma_s^2}{2\,L_s^2} + \sum_{s=0}^{8} \frac{m_s\gamma_s}{a_s} \\
&= \quad \sum_{s=0}^{8} \frac{m_s\gamma_s}{2L_s^2}\;.
\end{aligned}$$

Окончателно, използвайки (1) и (2), записваме усреднения хамилтониан във вида

$$\left\langle H \right\rangle^l \;=\; \sum_{s=0}^{8} \frac{m_s^3\,\gamma_s^2}{2\,L_s^2} - \sum_{0\le i<j\le 8} \frac{\mathcal{G} m_i m_j}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{(1\,-\,e_i\,\cos\,u_i)(1\,-\,e_j\,\cos\,u_j)\,du_i\,du_j}{|r_i - r_j|}\,.$$

Секулярните уравнения, т.е. уравненията за дълготрайните изменения на елементите на Делоне́, имат вида:

$$\frac{d}{dt}\left\langle L_s \right\rangle^l \;=\; -\frac{\partial\left\langle H \right\rangle^l}{\partial l_s} \,=\, 0 \;\Longrightarrow\; L_s \,=\, const \;\Longrightarrow\; a_s \,=\, const\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle G_s \right\rangle^l \;=\; -\frac{\partial\left\langle H \right\rangle^l}{\partial g_s} \,=\, \sum_{j\,\neq\, s} \frac{\mathcal{G}\,m_j\,m_s}{4\pi^2}\,\frac{\partial}{\partial g_s} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{(1\,-\,e_s\,\cos\,u_s)(1\,-\,e_j\,\cos\,u_j)\,du_s\,du_j}{|r_s - r_j|}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle \Theta_s \right\rangle^l \;=\; -\frac{\partial\left\langle H \right\rangle^l}{\partial \theta_s} \,=\, \sum_{j\,\neq\, s} \frac{\mathcal{G}\,m_j\,m_s}{4\pi^2}\,\frac{\partial}{\partial \theta_s} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{(1\,-\,e_s\,\cos\,u_s)(1\,-\,e_j\,\cos\,u_j)\,du_s\,du_j}{|r_s - r_j|}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle l_s \right\rangle^l \;=\; \frac{\partial\left\langle H \right\rangle^l}{\partial L_s} \,=$$

$$=\; \frac{m_s^3\,\gamma_s^2}{L_s^3} \;-\; \sum_{j\,\neq\, s} \frac{\mathcal{G}\,m_j\,m_s}{4\pi^2}\,\frac{\partial}{\partial L_s} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{(1 - e_s\,\cos\,u_s)(1 - e_j\,\cos\,u_j)\,du_s\,du_j}{|r_s - r_j|}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle g_s \right\rangle^l \;=\; \frac{\partial\left\langle H \right\rangle^l}{\partial G_s} \,=\, -\sum_{j\,\neq\, s} \frac{\mathcal{G}\,m_j\,m_s}{4\pi^2}\,\frac{\partial}{\partial G_s} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{(1\,-\,e_s\,\cos\,u_s)(1\,-\,e_j\,\cos\,u_j)\,du_s\,du_j}{|r_s - r_j|}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle \theta_s \right\rangle^l \;=\; \frac{\partial\left\langle H \right\rangle^l}{\partial \Theta_s} \,=\, -\sum_{j\,\neq\, s} \frac{\mathcal{G}\,m_j\,m_s}{4\pi^2}\,\frac{\partial}{\partial \Theta_s} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{(1\,-\,e_s\,\cos\,u_s)(1\,-\,e_j\,\cos\,u_j)\,du_s\,du_j}{|r_s - r_j|}\,.$$

Остава да пресметнем тези интеграли, като за целта отначало трябва да развием функциите под двойните интеграли в редове на Тейлър.

Павлина Маринова, p_marinova@gbg.bg
Деян Станков, d_stankov@mail.bg
Люба Петрова, mukksy@yahoo.com