# Пораждащи функции

За да дефинираме пораждаща функция е необходима следната

**Теорема.** *Нека* $S = S(q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots, v_n)$ *е произволна диференцируема функция, за която :*

$$det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial v_j}\right) \neq 0.$$

*Тогава смяната на променливите* $(p, q) \to (u, v)$*, където*

$$p_i \ := \ \frac{\partial S}{\partial q_i}\ , \qquad u_j \ := \ -\frac{\partial S}{\partial v_j}$$

*за* $i, j = 1, \ldots, n$ *е канонична.*

*Във векторен запис* $(p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n))$*,*

$$p \ = \ \frac{\partial S}{\partial q}\ , \qquad u \ = \ -\frac{\partial S}{\partial v}.$$

**Доказателство.** По условие, диференциалът на пораждащата функция $S$ има вида

$$dS \ = \ \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)dq_i + \left(\frac{\partial S}{\partial v_i}\right)dv_i\right] \ = \ \sum_{i=1}^{n}(p_i dq_i - u_i dv_i) \tag{1}$$

Като приложим свойствата на външното произведение към равенството (1) получаваме:

$$d^2S \ = \ d(dS) \ = \ d\sum_{i=1}^{n}\big(p_i dq_i - u_i dv_i\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\big(dp_i \wedge dq_i - du_i \wedge dv_i\big) \ = \ 0,$$

т.е. имаме

$$\sum_{i=1}^{n}\big(dp_i \wedge dq_i - du_i \wedge dv_i\big) \ = \ 0,$$

което е точно дефиницията за канонична смяна.

Остава да покажем, че $S$ е смяна на променливите. Наистина, тъй като

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial v}\right) \neq 0,$$

то условията за прилагане на теоремата за неявните функции са налице за уравнението

$$p \;=\; \frac{\partial S(q,v)}{\partial q}$$

и може да изразим $v = v(p,q)$ като функция на $p$ и $q$.

Така изразеното $v = v(p,q)$ заместваме в

$$u \;=\; -\frac{\partial S(q,v)}{\partial v} \;=\; F(q,v) = F(q, v(p,q)) \;=\; u(p,q)$$

и получаваме $u$ като функция на $p$ и $q$ .

$$u \;=\; u(p,q).$$

Теоремата е доказана.

Цветелина Митова, tsvetelina_mitova@mail.bg
Мая Тошева, maia_d_t@abv.bg