Елементи на Поанкаре

Поанкаре дефинира две системи от по шест елемента, характеризиращи орбитите на планетите:

$$\begin{array}{ccc} L \ , & L - G \ , & G - \Theta \ , \\ l + g + \theta \ , & -g - \theta \ , & -\theta \ , \end{array}$$

и втора система

$$\begin{array}{lll} L \ , & \xi := \sqrt{2(L-G)}\cos(g+\theta) \ , & p := \sqrt{2(G-\Theta)}\cos(\theta) \ , \\ \lambda \ , & \eta := -\sqrt{2(L-G)}\sin(g+\theta) \ , & q := \sqrt{2(G-\Theta)}\sin(\theta) \ . \end{array}$$

Лема 1. *Елементите от първата система на Поанкаре са канонични.*

Доказателство. Директно проверяваме, че каноничната две-форма се запазва:

$$\begin{aligned} & dL \wedge d\lambda + d(L-G) \wedge d(-g-\theta) + d(G-\Theta) \wedge d(-\theta) \\ = \ & dL \wedge dl + dL \wedge dg + dL \wedge d\theta - dL \wedge dg + dG \wedge dg - dL \wedge d\theta \\ & + dG \wedge d\theta - dG \wedge d\theta + d\Theta \wedge d\theta \\ = \ & dL \wedge dl + dG \wedge dg + d\Theta \wedge g\theta \, . \end{aligned}$$

Понеже елементите на Делоне $(L, G, \Theta, l, g, \theta)$ са канонични, то и получените по-горе елементи са канонични.

Лемата е доказана.

Лема 2. *Ако r и φ са спрегнати канонични променливи, то и променливите*

$$\sqrt{2r}\cos(\varphi) \quad и \quad \sqrt{2r}\sin(\varphi)$$

са спрегнати канонични.

Доказателство. Директно пресмятаме

$$\begin{aligned} & d\big(\sqrt{2r}\cos\varphi\big) \wedge d\big(\sqrt{2r}\sin\varphi\big) \\ = \ & \Big[\frac{1}{\sqrt{2r}}\cos\varphi\, dr - \sqrt{2r}\sin\varphi\, d\varphi\Big] \wedge \Big[\frac{1}{\sqrt{2r}}\sin\varphi\, dr - \sqrt{2r}\cos\varphi\, d\varphi\Big] \\ = \ & \cos^2\varphi\, dr \wedge d\varphi - \sin^2\varphi\, d\varphi \wedge dr \\ = \ & dr \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Лемата е доказана.

Лема 3. *Елементите от втората система на Поанкаре са канонични.*
Доказателство. Прилагаме двукратно лема 2, като L и λ не се променят.

$$\begin{aligned} d\xi \wedge d\eta &= d(L-G) \wedge d(-g-\theta); \\ dp \wedge dq &= d(G-\Theta) \wedge d(-\theta), \end{aligned}$$

с което лемата е доказана.

Променливите на Поанкаре са удобни за планетни системи, подобни на Слънчевата. Да разгледаме подробно тези променливи:

$$\begin{aligned} L &= m\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\,, \\ G &= \sqrt{1-e^2}L\,, \\ L-G &= m\sqrt{\gamma}\sqrt{a}(1-\sqrt{1-e^2})\,. \end{aligned}$$

Тъй като $\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\dfrac{\alpha}{2}$, то

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{2(1-\sqrt{1-e^2})\sqrt{m^2\gamma a}}\,.\cos(g+\theta) \approx \sqrt[4]{m^2\gamma a}\,.\,e\cos(g+\theta) \\ \eta &= -\sqrt{2(1-\sqrt{1-e^2})\sqrt{m^2\gamma a}}\,.\sin(g+\theta) \approx \sqrt[4]{m^2\gamma a}\,.\,e\sin(g+\theta). \end{aligned}$$

Променливите ξ и η наричаме **ексцентрични**, тъй като са малки при малки ексцентрицитети e.

Аналогично,

$$\begin{aligned} \Theta &= G\cos i, \\ G-\Theta &= (1-\cos i)\,G = (1-\cos i)\sqrt{1-e^2}\sqrt{m^2\gamma a}\,, \\ p &= \sqrt{2(1-\cos i)\sqrt{1-e^2}\sqrt{m^2\gamma a}}\,.\,\cos\theta \approx \sqrt[4]{m^2\gamma a}\,\sin i\,\cos\theta\,, \\ q &= -\sqrt{2(1-\cos i)\sqrt{1-e^2}\sqrt{m^2\gamma a}}\,.\,\sin\theta \approx \sqrt[4]{m^2\gamma a}\,.\,\sin i\sin\theta. \end{aligned}$$

Променливите p и q наричаме **облични**, тъй като са малки при малки наклонености i.

Стела Иванчева, stellt@kefche.com
Антон Попов, toni28@abv.bg
Радостин Сурилов, radostinsurilov@abv.bg