ТЕОРИЯ НА ПЕРТУРБАЦИИТЕ

Нека разгледаме хамилтонова система с хамилтониан $H = H_0(I)$, зависещ само от променливите действие $I_1, \ldots, I_n$, но не и от променливите ъгъл $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$,. Тогава хамилтоновата система има вида

$$(1)\qquad \left| \begin{array}{ccccc} \dot{I}_k & = & -\frac{\partial H_0(I)}{\partial \varphi_k} & = & 0 \\ \dot{\varphi}_k & = & \frac{\partial H_0(I)}{\partial I_k} & := & \omega_k(I), \end{array} \right.$$

където с ω_k сме означили k–та честота. Очевидно $I_k = const$ и следователно k–тата честота $\omega_k(I) = const$, като функция зависеща от константа. Оттук чрез непосредствено интегриране решаваме системата (1).

Пример. Да разгледаме задачата на Кеплер – тогава $n = 3$ и променливите действие и ъгъл са елементите на Делоне:

$$I_1 = L, I_2 = G, I_3 = \Theta, \varphi_1 = l, \varphi_2 = g, \varphi_3 = \theta,$$

l е средната аномалия, g е разликата в дължините на перихелия и възела и Θ е дължината на възела. Хамилтонианът

$$H_0 = -\frac{m^3\gamma^2}{2L^2}$$

и честотите

$$\omega_1 = \frac{\partial H_0}{\partial I_1} = \frac{\partial H_0}{\partial L} = \frac{m^3\gamma^2}{L^3} = \frac{m^3\gamma^2}{m^3\gamma^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}} := n = const,$$

$$\omega_2 = \frac{\partial H_0}{\partial I_2} = \frac{\partial H_0}{\partial G} = 0,$$

$$\omega_3 = \frac{\partial H_0}{\partial I_3} = \frac{\partial H_0}{\partial \Theta} = 0.$$

Следователно L, G, Θ, g и θ са константи, а за средната аномалия получаваме $l = n(t - t_0)$.

Нека имаме хамилтонова система с хамилтониан $H(I, \varphi)$, зависещ от n променливи $I_1, \ldots, I_n$ и n променливи $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Представяме $H(I, \varphi)$ във вида:

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + R(I, \varphi),$$

където $H_0(I)$ ще наричаме непертурбиран хамилтониан, а $R(I, \varphi)$–пертурбация или още смущение. Ще предполагаме, че видът на хамилтониана е такъв, че от него можем да отделим част $H_0(I)$, независеща от $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и много по-голяма от остатъка $R(I, \varphi) = H(I, \varphi) - H_0(\varphi)$:

$$H_0(I) \gg R(I, \varphi).$$

Пример. За Слънчевата система непертурбираният хамилтониан

$$H_0 \;=\; -\sum_{k=0}^{8} \frac{m_k^3\gamma_k^2}{2L_k^2}$$

зависи само от

$$I_1,\; I_4,\; I_7,\; I_{10},\; I_{13},\; I_{16},\; I_{19},\; I_{22},\; I_{25},\; I_{27}\,.$$

Сумата е до 8, а не до 9 и в нея не фигурират I_{28}, I_{29}, I_{30}, понеже масата на Плутон е твърде малка и се пренебрегва. От друга страна

$$R = \sum_{k=0}^{8} \frac{m_k\gamma_k}{|r_k|} - \sum_{0\le s<j\le 8} \frac{\mathcal{G}_{gr} m_s m_j}{|r_s - r_j|}$$

и понеже имаме следното отношение на масите на планетите към масата на Слънцето $\frac{m_1+\ldots+m_8}{m_0} \approx \frac{1}{10^3}$ и от $\gamma \approx \mathcal{G}_{gr} m_k$, то получаваме $R \approx \frac{1}{30}H_0$. За енергията на слънчевата система имаме $H = H_0 + R < 0$, защото

$$H = \underbrace{-\sum_{k=0}^{8} \frac{m_K^3\gamma_k^2}{2L^2}}_{H_0(I)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{8} \frac{m_k\gamma_k}{|r_k|} - \sum_{0\le i<j\le 8} \frac{G_{gr} m_i m_j}{|r_i - r_j|}}_{R(I,\varphi)}$$

а $r_0, \ldots, r_8$ са изразени чрез елементите на Делоне.

$$(I,\varphi) = (L_0, G_0, \Theta_0, \ldots, L_8, G_8, \Theta_8, l_0, g_0, \theta_0, \ldots, l_8, g_8, \theta_8),$$

където L_i, G_i, Θ_i и l_i, g_i, θ_i са променливи съответно действие и ъгъл, т.е. имаме 27 променливи действие и 27 променливи ъгъл.

Променливите ъгъл се делят на бързи и бавни. Бавна е променлива, чиято производна е ≈ 0 :

$$\dot{\varphi}_k = \frac{\partial H(I,\varphi)}{\partial I_k} \approx 0.$$

Например такива са $\dot{g_k} \approx \dot{\theta}_k \approx 0$(18 бавни променливи). От друга страна, за средното движение имаме

$$\dot{l_k} = \frac{\partial H_0}{\partial L_k} = \frac{m_k^3\gamma_k^2}{L_k^3} = n_k \neq 0,$$

което дава 9 бързи променливи ъгъл.

Пример: Да разгледаме отново задачата за двете тела при $\gamma_0 = \frac{m_1^3 G}{(m_0+m_1)^2}$ и $\gamma_1 = \frac{m_0^3 G}{(m)+m_1)^2}$. Като използваме, че $m_0 r_0 + m_1 r_1 = 0$, получаваме:

$$H \;=\; -\left[\frac{m_0^3\gamma_0^3}{2L_0^2} + \frac{m_1^3\gamma_1^3}{2L_1^2}\right] + \frac{m_0\gamma_0}{|r_0|} + \frac{m_1\gamma_1}{|r_1|} - \frac{G m_0 m_1}{|r_0 - r_1|}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left[\frac{m_0^3}{2L_0^2}\frac{m_1^3 G}{(m_0+m_1)^2} + \frac{m_1^3}{2L_1^2}\frac{m_1^3 G}{(m_0+m_1)^2}\right] + \frac{m_0}{|r_0|}\frac{m_1^3 G}{(m_0+m_1)^2} + \frac{m_1 m_0^3 G}{|r_0|(m_0+m_1)^2} - \frac{Gm_0m_1}{|r_0-r_1|} \\
&= -\frac{Gm_0^3m_1^3}{(m_0+m_1)^2}\left(\frac{1}{2L_0^2} - \frac{1}{2L_1^2}\right) + Gm_0m_1\left(\frac{m_1^2}{|r_0|(m_0+m_1)^2} + \frac{m_0^2}{|r_1|(m_0+m_1)^2} - \frac{1}{|r_0-r_1|}\right) \\
&= -\frac{Gm_0^3m_1^3}{(m_0+m_1)^2}\left(\frac{1}{2L_0^2} + \frac{1}{2L_1^2}\right) \\
&= H_0,
\end{aligned}
$$

понеже

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|r_0-r_1|} &= \frac{\frac{m_0}{m)+m_1} + \frac{m_1}{m_0+m_1}}{|r_0-r_1|} \\
&= \frac{m_0}{(m_0+m_1)| - \frac{m_1}{m_0}r_1 - r_1|} + \frac{m_1}{(m_0+m_1)|r_0 + \frac{m_0}{m_1}r_1|} \\
&= \frac{m_0^2}{(m_0+m_1)^2|r_1|} + \frac{m_1^2}{(m_0+m_1)^2|r_0|}
\end{aligned}
$$

и част от по-горният израз става равна на нула. В такъв случай $H = H_0(L_0, L_1)$ откъдето всички променливи освен $l_j = \frac{\partial H}{\partial L_j}$ са бавни, т.е. дължините на възлите и перихелиите се менят бавно.

Да се върнем на слънчевата система: $H(I,\varphi) = H_0(I) + R(I,\varphi) < 0$ и $H_0 \leq R$, откъдето получаваме:

$$
(3) \qquad \left|\begin{array}{lllll}
\dot{I} &=& \frac{\partial H}{\partial \varphi} &=& -\frac{\partial R}{\partial \varphi} \approx 0 \\
\dot{\varphi} &=& \frac{\partial H}{\partial I} &=& \frac{\partial H_0(I)}{\partial I} + \frac{\partial R(I<\varphi)}{\partial I} \approx \frac{\partial H_0(I)}{\partial I} := \omega(I),
\end{array}\right.
$$

т.е. честотите са градиент на непертурбирания хамилтониан:

$$
\omega(I) = \left(\frac{\partial H_0}{\partial I_1}, \ldots, \frac{\partial H_0}{\partial I_n}\right).
$$

За да изследваме системата (3) развиваме пертурбирания хамилтониан в комплексен ред на Фурие[1]:

$$
R(I,\varphi) = \sum_{s\in\mathbf{Z^n}} R_s(I) e^{i\vec{s}\vec{\varphi}},
$$

където $\mathbf{Z^n}$ е множеството от всички целочислени n–орки, а $R_s(I)$ е s–ти коефициент на Фурие:

$$
R_s(I) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} R(I,\varphi)e^{-i\vec{s}\vec{\varphi}}d\varphi_1\ldots d\varphi_n.
$$

[1] Жан Батист Жозеф ФУРИЕ (Fourier) – Френски математик и физик. Трудове по алгебра, диференциални уравнения и математична физика. Създател на теорията на тригонометричните редове. Установява (1822) закона на Фурие.

След комплексно спрягане получаваме:

$$\overline{R_s(I)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} R(I,\varphi)\overline{e^{-i\vec{s}\vec{\varphi}}} d\varphi_1 \dots d\varphi_n = R_{-s}(I).$$

За сходимостта на R_s имаме пряка зависимост от това колко диференцируема е R по φ: ако $R \in C^k(\varphi)$, т.е. R е k пъти диференцируема по $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и k-тите производни са непрекъснати, то съществуват константи $const_k$ такива, че

$$|R_s| \leq \frac{C_k}{|s|^k} \qquad \forall s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbf{Z}^n.$$

В небесната механика (в частност за Слънчевата система), функциите $R(I,\varphi)$ и $H(I,\varphi)$ са реално аналитични, т.е. безкрайно пъти диференцируеми при реални I, φ, и със строго положителен радиус на сходимост на рада на Тейлър във всяка точка(I,φ). Тогава, поради периодичността на $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, имаме

$$|R_s| \leq const.e^{-|s|\rho}, \rho > 0$$

за някаква константа $const$ и някоя положителна константа ρ. Това наричаме експоненциално бърза сходимост на редовете на Фурие. По този начин хамилтонианът придобива вида

$$H(I,\varphi) \;=\; H_0(I) + R_0(I) + \sum_{s \,\in\, \mathbf{Z^n} - \{0\}} R_s(I) e^{i\vec{s}\vec{\varphi}}, \tag{4}$$

където $\sum\limits_{s \,\in\, \mathbf{Z^n} - \{0\}} R_s(I) e^{i\vec{s}\vec{\varphi}}$ са периодичните членове на R, а $R_0(I)$ се нарича секулярна част на пертурбацията R.

Окончателно – понеже $e^{i\vec{s}\vec{\varphi}} = \cos s\varphi + i \sin s\varphi$, от (4) получаваме

$$H(I,\varphi) = H_0(I) + R_0(I) + \sum_s \left(\frac{R_s(I) + R_{-s}(I)}{2} \cos s\varphi + \frac{R_s(I) - R_{-s}(I)}{2i} \sin s\varphi \right),$$

сумирането става по целочислените $s \in \mathbf{Z}^n$, като обединяваме s и $(-s)$, а нулевият индекс $s = (0, \dots, 0)$ не участва в сумирането.

Периодичните членове R_s затрудняват много решаването на задачата. Все още не е решен въпроса дали слънчевата система е устойчива, т.е. дали някои от планетите няма да се сблъскат (след достатъчно голям брой години).

Тодор Николов, e-mail: fn10837@fmi.uni-sofia.bg
Видьо Иванов, e-mail: fn10797@fmi.uni-sofia.bg