Лема 7. Векторното произведение

$$X \times P = (x_1, x_2, x_3) \times (p_1, p_2, p_3) = G(\sin i \sin\theta, -\sin i \cos\theta, \cos i),$$

където G е големината на момента, θ е дължината на перихелия, i е наклонененост на плоскостта на орбитата, $p = mx$ е векторът на импулса.

Доказателство. Използваме пресмятанията от Лема 1 и Лема 3:

$$\begin{aligned} X \times P &= X \times \left[(\text{скаларна функция}).X - \frac{G}{r\sin\psi}(\cos\theta, \sin\theta, 0)\right] \\ &= -\frac{G}{\sin\psi}\left[(x_1, x_2, x_3) \times \left(\frac{\cos\theta}{r}, \frac{\sin\theta}{r}, 0\right)\right] \\ &= -\frac{G}{\sin\psi}\left[-\frac{x_3\sin\theta}{r}, \frac{x_3\cos\theta}{r}, \frac{x_1\sin\theta}{r} - \frac{x_2\cos\theta}{r}\right] \\ &= \frac{G}{\sin\psi}\left[\frac{x_3\sin\theta}{r}, -\frac{x_3\cos\theta}{r}, -\frac{x_1\sin\theta}{r} + \frac{x_2\cos\theta}{r}\right] \end{aligned}$$

От Лема 3 използвахме, че

$$\begin{aligned} \sin i &= \frac{x_3}{r\sin\psi}, \\ \cos i &= \left[-\frac{x_1\sin\theta}{r} + \frac{x_2\cos\theta}{r}\right]\frac{1}{\sin\psi}. \end{aligned}$$

Следователно,

$$\begin{aligned} \frac{x_3}{r} &= \sin i \sin\psi, \\ -\frac{x_1\sin\theta}{r} + \frac{x_2\cos\theta}{r} &= \cos i \sin\psi \end{aligned}$$

Замествайки във векторното произведение получаваме:

$$\begin{aligned} X \times P &= \frac{G}{\sin\psi}\left(\sin i \sin\psi \sin\theta, -\sin i \sin\psi \cos\theta, \cos i \sin\psi\right) \\ &= G\left(\sin i \sin\theta, -\sin i \cos\theta, \cos i\right). \end{aligned}$$

Доказахме, че $p = mx$ с точност до прибавяне на λx, т.е. $p = mx + \lambda x$, където λ е скаларна функция. Хамилтонианът

$$H = \frac{\langle p, p\rangle}{2m} - \frac{m\gamma}{r}.$$

От една страна кинетичната енергия е равна на $\frac{mx^2}{2m}$, а от друга на $\frac{\langle p,p\rangle}{2m}$. Следователно

$$\begin{aligned}\frac{mx^2}{2m} &= \frac{\langle mx+\lambda x, mx+\lambda x\rangle}{2m} \\ &= \frac{mx^2}{2} + \lambda\langle x,x\rangle + \frac{\lambda^2\langle x,x\rangle}{2m}\end{aligned}$$

Получаваме 2 случая:

1) При $\lambda = 0$ движението е в посока обратна на часовниковата стрелка.

2) При

$$\lambda = -\frac{2m\langle \dot{x},x\rangle}{\langle \dot{x},x\rangle},$$

движението е в посока на часовниковата стрелка, което съответства на посоката на смяна на времето.

Лема 7 е доказана.

Татяна Енева, *laila_sed@yahoo.com*
Станислав Бенов