Елементи на Делоне: Истинска аномалия (Лема 5)

В лема 4 се запознахме със средната и ексцентричната аномалии. Сега ще въведем понятието „истинска аномалия“. Нека

$$r \;=\; \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,, \qquad r_{\min} \;=\; a(1-e) \quad \text{и} \quad r_{\max} \;=\; a(1+e)$$

са съответно разстоянието до планетата J^*, минималното и максималното разстояние до нея. Също така доказахме формулата

$$S \;=\; \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{\frac{2m^2\gamma}{r}-\frac{G^2}{r^2}-\frac{m^4\gamma^2}{L^2}}dr + G\arccos\Big(\frac{x_1}{r}\cos\theta+\frac{x_2}{r}\sin\theta\Big).$$

Да припомним и въведената по-рано ексцентрична аномалия в задачата на Кеплер. Тогава въведохме ъгъл u чрез формулата

$$r \;=\; a(1-e\cos u)\,.$$

Тъй като $-1 \le \cos u \le 1$, то $r_{\min} \le r \le r_{\max}$ и ъгъл u е точно тази ексцентрична аномалия.

Лема 5. Да въведем ъгъл v чрез фокалното уравнение на елипсата

$$r \;:=\; \frac{a\cdot(1-e^2)}{1+e\cdot\cos v}$$

(v се нарича „истинска аномалия“). Тогава:

1. В сила е равенството $g=\psi-v$.

2. Уравнението $r=r(v)$ е фокално уравнение на елипса, т.е. v е истинската аномалия, въведена в задачата на Кеплер.

3. Връзката между ексцентричната аномалия u и истинската аномалия v е:

$$r\,\cos v \;=\; a\cdot(\cos u-e), \qquad r\,\sin v \;=\; a\sqrt{1-e^2}\cdot\sin u$$

Доказателство. 1. Съгласно дефиницията на пораждаща функция,

$$g \;:=\; \frac{\partial S}{\partial G} \;=\; \int\limits_{r_{\min}}^{r} \frac{-2G}{r^2}\cdot\frac{dr}{2\,G\sqrt{\Big(\dfrac{1}{r_{\min}}-\dfrac{1}{r}\Big)\Big(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_{\max}}\Big)}}+\psi$$

$$=\; \int\limits_{r_{\min}}^{r} \frac{d(\frac{1}{r})}{\sqrt{\Big(\dfrac{1}{r_{\min}}-\dfrac{1}{r}\Big)\Big(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_{\max}}\Big)}}+\psi$$

Сменяме интеграционната променлива: когато $v = 0$, то

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos v}{a(1-e^2)} = \frac{1+e}{a(1-e)} = \frac{1}{r_{\min}}$$

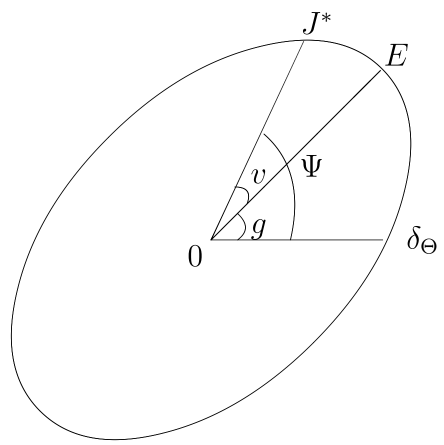
а при $v = v$, имаме $r = r$. Получаваме:

$$\begin{aligned} g &= \frac{d\Big(\dfrac{1+e\cos v}{a(1-e^2)}\Big)}{\sqrt{\Big(\dfrac{1}{a\cdot(1-e)} - \dfrac{1+e\cdot\cos v}{a\cdot(1-e^2)}\Big)}\cdot\sqrt{\Big(\dfrac{1+e\cdot\cos v}{a\cdot(1-e^2)} - \dfrac{1}{a\cdot(1+e)}\Big)}} + \psi \\ &= -\int\limits_0^v dv + \psi = -v + \psi. \end{aligned}$$

2. Тъй като g е канонична променлива, а $H = -\dfrac{m^3\gamma^2}{2L^2}$, то $\dot{g} = \dfrac{\partial H}{\partial G} = 0$. Следователно, точката E е фиксирана. Това означава, че

$$E \;=\; const \;\Longrightarrow\; r \;=\; \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\,\cos v}$$

е фокално уравнение на елипсата, лежаща в равнината, и чиято истинска аномалия v се отмерва от $\angle J^*OE$.



3. Знаем, че

$$r \;=\; a\,(1 - e\,\cos u) \;=\; \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\,\cos v}$$

от което директно следват уравненията:

$$\begin{aligned} r\,\cos v &= a\cdot(\cos u - e) \\ r\,\sin v &= a\sqrt{1-e^2}\,\sin u \end{aligned}$$

От $r\cdot(1+e\cos v) = a(1-e^2)$ получаваме:

$$r\cos v \;=\; \frac{a\,(1-e^2) - r}{e} \;=\; \frac{a\,(1-e^2) - a\,(1-e\cos u)}{e} \;=\; a\,(\cos u - e).$$

От тук получаваме и второто уравнение:

$$
\begin{aligned}
r\sin v &= \sqrt{r^2 -^2 \cos^2 v} \;=\; \sqrt{a^2(1-e\cos u)^2 - a^2(\cos u - e)^2} \\
&= a\sqrt{1 - re\cos u + e^2\cos^2 u + re\cos u - e^2} \\
&= a\sqrt{(1-e^2)(1-\cos^2 u)} \\
&= a\sqrt{1-e^2}\sin u\,. \quad \square
\end{aligned}
$$

Виктория Събева, vicky_raven@yahoo.com
Илиян Марков