Елементи на Делоне: Лема 4

Нека $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ е разстоянието до планетата, а $r_{\min} = a(1-e)$ и $r_{\max} = a(1+e)$ са минималното и максималното разстояние до нея. Да въведем ъгъл u чрез формулата $r = a(1 - e\cos u)$. Тъй като $-1 \leq \cos u \leq 1$, то $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ и ъгъл u съвпада с въведената по-рано в задачата на Кеплер ексцентрична аномалия.

Лема 4. Ако $r = a \cdot (1 - e \cdot \cos u)$, то:

1. В сила е уравнението на Кеплер

$$l \;=\; u - e \cdot \sin u\,,$$

където $l := \frac{\partial S}{\partial L}$ е спрегнатата на L променлива.

2. В сила е уравнението

$$l \;=\; n \cdot (t - t_0)\,,$$

където $n = \sqrt{\dfrac{\gamma}{a^3}}$, и следователно l съвпада с по-рано въведената в задачата на Кеплер средна аномалия, а n със средното движение.

Доказателство. 1. По дефиниция на пораждаща функция, $l := \frac{\partial S}{\partial L}$. Използваме и разлагането от Лема 2:

$$\begin{aligned} l \;&:=\; \frac{\partial S}{\partial L} \\ &=\; \frac{\partial}{\partial L}\left[\int_{r_{\min}}^{r} \sqrt{\frac{2m^2\gamma}{r} - \frac{G^2}{r^2} - \frac{m^4\gamma^2}{L^2}}dr + G \cdot \psi\right] \\ &=\; \int\limits_{r_{\min}}^{r} \frac{m^4\gamma^2}{L^3} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2m^2\gamma}{r} - \dfrac{G^2}{r^2} - \dfrac{m^4\gamma^2}{L^2}}} \\ &=\; \frac{m^4\gamma^2}{L^3} \cdot \int\limits_{r_{\min}}^{r} \frac{dr}{G\sqrt{\left(\dfrac{1}{r_{\min}} - \dfrac{1}{r}\right)\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_{\max}}\right)}} \end{aligned}$$

Сменяме границите на интегриране: когато $u = 0$, то $r = a(1 - e) = r_{\min}$; при $u = u$, имаме $r = r$:

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{m^4\gamma^2}{L^2G}\cdot\int\limits_0^u \frac{da(1-e\cos u)}{\sqrt{\left(\frac{1}{a(1-e)}-\frac{1}{a(1-e\cos u)}\right)\cdot\left(\frac{1}{a(1-e\cos u)}-\frac{1}{a(1+e)}\right)}}\\
&= \int\limits_0^u \frac{e\cdot\sin u}{\sqrt{e\cdot(1-\cos u)}}\cdot\frac{(1-e\cdot\cos u)du}{\sqrt{e\cdot(1+\cos u)}}\\
&= \int\limits_0^u (1-e\cdot\cos u)du\\
&= u-e\cdot\sin u
\end{aligned}
$$

Изведохме уравнението на Кеплер $l = u - e\sin u$, като l е елементът на Делоне́.

2. По построение, елементите на Делоне́ $(L, G, \Theta, l, g, \theta)$ са канонични и следователно средната аномалия l удовлетворява диференциалното уравнение:

$$
\begin{aligned}
\dot{l} &= \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\cdot\left(\frac{-m^3\gamma^2}{2L^2}\right) = \frac{m^3\gamma^2}{L^3}\\
&= \frac{m^3\gamma^2}{m^3\gamma^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}} := n \quad = \text{средно движение}\,.
\end{aligned}
$$

От това уравнение следва, че $l = n(t - t_0)$, където t_0 е моментът на преминаване през перихелията, т.е. $l(t_0) = 0$. Наистина, ако $l = 0$, то в уравнението на Кеплер следва, че $u = 0$ и значи $r = a(1 - e\cos 0) = r_{\min}$. Доказахме че l съвпада със средната аномалия. $\square$

Антоанета Драганова, antoaneta_d2001@yahoo.com
Цветомира Димитрова, cucihi@mail.bg