Елементи на Делоне: Лема3 (Θ и θ)

Нека разгледаме сферата с радиус r:

$$S_r^2 \;=\; \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}\,.$$

Нека δ_0 е правата, която минава през нулата и $\angle(x_1, \delta_0) = \theta$. Разглеждаме равнината α, която минава през нулата, през правата δ_0 и през планетата $J^* = (x_1, x_2, x_3)$. Означаваме с i ъгъла между α и между началната равнина. Този ъгъл се нарича инклинация на J^*.

Лема 3. 1) Ъгълът между правите δ_0 и OJ^* е

$$\psi \;=\; \arccos\Big(\frac{x_1}{r}\cos\theta + \frac{x_2}{r}\sin\theta\Big).$$

2) В сила са равенствата

$$\sin i = \frac{x_3}{r\sin\psi}, \qquad \cos i = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{-\frac{x_1}{r}\cos\theta + \frac{x_2}{r}\sin\theta}{\sin\psi}.$$

3) $\Theta = G\cos i$ и следователно орбитата на J^* лежи в една неизменна равнина, т. е. ъгълът i е константен.

Доказателство. 1) Съгласно дефиницията на косинус,

$$\cos\psi = \frac{\langle\, OJ^*, OB\,\rangle}{|OJ^*|\cdot|OB|},$$

където $\langle OJ^*, OB\rangle$ е евклидово скаларно произведение, а $|x|$ е дължината на вектора x. Но $OJ^* = (x_1, x_2, x_3)$, а $B = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, откъдето

$$\cos i \;=\; \frac{\langle (x_1, x_2, x_3), (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)\rangle}{r.r} \;=\; \frac{x_1}{r}\cos\theta + \frac{x_2}{r}\sin\theta\,.$$

Това означава, че

$$\psi \;=\; \arccos\Big(\frac{x_1}{r}\cos\theta + \frac{x_2}{r}\sin\theta\Big).$$

2) Разглеждаме правоъгълния $\triangle\, OCJ^*$. Тъй като

$$|OJ^*| \;=\; r\,, \qquad \angle COJ^* \;=\; \psi\,,$$

то $J^*C = r\sin\psi$.

Разглеждаме и правоъгълния $\triangle OCJ^*$. За него е изпълнено, че

$$\sin i \;=\; \frac{x_3}{r\sin\psi},$$

откъдето пресмятаме

$$\begin{aligned}
\cos i &= \sqrt{1-\sin^2 i}\\
&= \sqrt{1-\frac{x_3^2}{r^2\sin^2\psi}}\\
&= \frac{1}{\sin\psi}\sqrt{\sin^2\psi - 1 + \frac{x_1^2+x_2^2}{r^2}}\\
&= \frac{1}{\sin\psi}\sqrt{-\cos^2\psi + \frac{x_1^2+x_2^2}{r^2}}\\
&= \frac{1}{\sin\psi}\sqrt{-\Big(\frac{x_1}{r}\cos\theta + \frac{x_2}{r}\sin\theta\Big)^2 + \frac{x_1^2+x_2^2}{r^2}}\\
&= \frac{1}{\sin\psi}\sqrt{\Big(-\frac{x_1}{r}\cos\theta + \frac{x_2}{r}\sin\theta\Big)^2}\\
&= \frac{1}{\sin\psi}\Big(-\frac{x_1}{r}\cos\theta + \frac{x_2}{r}\sin\theta\Big).
\end{aligned}$$

3) Хамилтонианът $H = -\frac{m^3\gamma^2}{2L^2}$ не зависи от θ. Тъй като Θ и θ са двойка спрегнати канонични променливи, то $\Theta = \frac{\partial H}{\partial\theta} = 0$. Аналогично, H не зависи от g и от

$$\Theta \;=\; constant.G \;=\; \frac{\partial H}{\partial g}\,.$$

Следователно, G е константа.

От друга страна, по построение чрез пораждаща функция S,

$$\Theta \;:=\; -\frac{\partial S}{\partial\theta} \;=\; -G\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \;=\; G\cos i.$$

И тъй като Θ и G са консатнти, то и ъгъл i е константен.

Доказахме, че инклинацията i на планетата не зависи от времето t, т. е. движението на планетата е в една и съща равнина.

Следствие. Правата δ_θ е линия на възлите, защото траекторията на планетата J^* пресича Ox_1x_2 в две точки от δ_θ. В зависимост от движението единия възел е възходящ, а другият низходящ. Ако ъгъл i = 0, то няма смисъл да говорим за възли, защото цялата траектория лежи в равнината Ox_1x_2.

Георги Георгиев, georgi_milan@yahoo.com
Михаела Милева, michaela_mileva@abv.bg