Елементи на Делоné: лема 2

Лема 2. Ако положим:

$$\begin{aligned} r_{min} &= a \cdot (1-e)\,, \\ r_{max} &= a \cdot (1+e)\,, \end{aligned}$$

които наричаме съответно *перихелий* и *апохелий*, то получаваме:

$$\begin{aligned} L &= m\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\,, \\ G &= m\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\,. \end{aligned}$$

Доказателство. По условие r_{min} и r_{max} са корени на уравнението:

$$\frac{m^4\gamma^2}{L^2}r^2 - 2m^2 r\gamma + G^2 \;=\; 0\,.$$

По формулите на Виет (Viette) за квадратното уравнение и условието на лемата получаваме системата:

$$\left|\begin{aligned} a\cdot(1-e) + a\cdot(1+e) &= \frac{2m^2L^2\gamma}{m^4\gamma^2} \;=\; \frac{2L^2}{m^2\gamma} \\ a\cdot(1-e)\cdot a\cdot(1+e) &= \frac{G^2\,L^2}{m^4\gamma^2} \end{aligned}\right.$$

След заместване на даденото от Лема 2 в предходната система, получаваме системата:

$$\left|\begin{aligned} r_{min} + r_{max} = \frac{2L^2}{m^2\gamma} \\ r_{min}r_{max} = \frac{G^2\,L^2}{m^4\gamma^2} \end{aligned}\right.$$

От друга страна:

$$\begin{aligned} r_{min} + r_{max} &= a\cdot(1-e) + a\cdot(1+e) \;=\; 2a\,, \\ L^2 &= m^2\gamma a\,. \end{aligned}$$

Следователно:

$$L \;=\; m\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\,,$$

а произведението:

$$\begin{aligned} r_{min}r_{max} &= a\cdot(1-e)\cdot a\cdot(1+e) \;=\; \frac{G^2\,L^2}{m^4\gamma^2} \;=\; \frac{G^2 a}{m^2\gamma}\,, \\ a^2(1-e^2) &= \frac{G^2 a}{m^2\gamma}\,, \end{aligned}$$

откъдето намираме:

$$G \;=\; m\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\,.$$

По този начин доказваме лемата, като получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} L = m\sqrt{\gamma}\sqrt{a} \\ G = m\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\,, \end{array} \right.$$

където $a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max})$, γ и m са положителни константи, а

$$e \quad = \quad \frac{r_{min} - r_{max}}{r_{min} + r_{max}} \qquad \text{и} \qquad |e| < 1\,.$$

Лора Лобутова , e-mail: loralo@abv.bg
Юлиян Филипов, iulian_fil@abv.bg