Канонични смени на променливите

Дефиниция 1. Смяната на променливите

$$(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \quad \to \quad (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$$

е *канонична*, ако

$$dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n \quad = \quad du_1 \wedge dv_1 + \dots + du_n \wedge dv_n.$$

Забележка. Със символа $\wedge$ е означено външното произведение.

Дефиниция 2. Смяната на променливите

$$(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \quad \to \quad (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$$

е канонична, ако:

$$\sum_{i=1}^{n} (u_{i,p_j}.v_{i,p_k} - u_{i,p_k}.v_{i,p_j}) = 0, \qquad \forall\ j < k, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (u_{i,p_j}.v_{i,q_k} - u_{i,p_k}.v_{i,q_j}) = \delta_{jk}, \qquad \forall\ j \le k, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (u_{i,q_j}.v_{i,q_k} - u_{i,q_k}.v_{i,q_j}) = 0, \qquad \forall\ j < k\,, \tag{3}$$

където $u_{i,p_j} := \dfrac{\partial u_i}{\partial p_j}$; $v_{i,p_k} := \dfrac{\partial v_i}{\partial p_k}, \dots$ са съкратени означения за частните производни.

Ще докажем еквивалентността на горните две дефиниции като разгледаме по-простия случай $n = 1$ и общия случай $n > 1$.

А. Нека **n=1.** Разглеждаме $u = u(p, q), v = v(p, q)$. Тогава

$$du = \frac{\partial u}{\partial p} dp + \frac{\partial u}{\partial q} dq,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial q} dq,$$

където сме означили $u_p := \dfrac{\partial u}{\partial p}$, $v_p := \dfrac{\partial v}{\partial p}, \dots$ Използвайки свойствата на външното произведение:

$$\begin{aligned} dp \wedge dp \quad &= \quad 0, \\ dp \wedge dq \quad &= \quad -dq \wedge dp, \end{aligned}$$

получаваме

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= (u_p dp + u_q dq) \wedge (v_p dp + v_q dq) \\ &= u_p v_p dp \wedge dp + u_p v_q dp \wedge dq + u_q v_p dq \wedge dp + u_q v_q dq \wedge dq \\ &= (u_p v_q - u_q v_p) dp \wedge dq \,. \end{aligned}$$

И тъй като смяната е канонична, то равенството $dp \wedge dq = du \wedge dv$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $u_p v_q - u_q v_p = 1$.

B. Нека **n>1.** Разглеждаме u и v като функции на $2n$ променливи:

$$u_i = u_i(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n), \quad v_i = v_i(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)\,.$$

Тогава

$$du_i = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial u_i}{\partial q_j} dq_j \Big), \qquad dv_i = \sum_{i,k=1}^{n} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial v_i}{\partial q_k} dq_k \Big).$$

Пресмятаме сумата

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} du_i \wedge dv_i &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial u_i}{\partial q_j} dq_j \right) \wedge \sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial v_i}{\partial q_k} dq_k \right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} u_{i,q_j} v_{i,p_k} dq_j \wedge dp_k + \sum_{i,j,k=1}^{n} u_{i,p_j} v_{i,q_k} dp_j \wedge dq_k \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^{n} u_{i,p_j} v_{i,p_k} dp_j \wedge dp_k + \sum_{i,j,k=1}^{n} u_{i,q_j} v_{i,q_k} dq_j \wedge dq_k. \end{aligned}$$

Търсим условията, за които $\sum_{i=1}^n du_i \wedge dv_i = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$. За целта приравняваме последните две събираеми на нула:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^{n} u_{i,p_j} v_{i,p_k} dp_j \wedge dp_k = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (u_{i,p_j} v_{i,p_k} - u_{i,p_k} v_{i,p_j}) = 0, \quad \forall\, j < k, \\ \sum_{i,j,k=1}^{n} u_{i,q_j} v_{i,q_k} dq_j \wedge dq_k \;=\; 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (u_{i,q_j} v_{i,q_k} - u_{i,q_k} v_{i,q_j}) = 0, \quad \forall\, j < k\,. \end{aligned}$$

Получихме условия (1) и (3).

След това, в първото събираемо правим смяна $k \to j$, $j \to k$ и го събираме с второто:

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \Big(u_{i,q_j} v_{i,p_k} dq_j \wedge dp_k + u_{i,p_j} v_{i,q_k} dp_j \wedge dq_k \Big) \;=\; \sum_{i,j,k=1}^{n} (u_{i,p_j} v_{i,q_k} - u_{i,q_k} v_{i,p_j})\, dp_j \wedge dq_k.$$

Забелязваме, че равенството $\sum_{i=1}^n du_i \wedge dv_i = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ е в сила тогава и само тогава, когато заедно с (1) и (3) е изпълнено и

$$\sum_{i=1}^{n} (u_{i,p_j} v_{i,q_k} - u_{i,q_k} v_{i,p_j}) = \delta_{jk}\,, \qquad \forall\, j \le k\,,$$

което е точно условието (2).

С това еквивалентността на двете дефиниции е доказана.

Теорема 1. Нека $H(p,q)$ е хамилтониан и $(p,q) \to (u,v)$ е смяна на променливите, за която $\widetilde{H}(u,v) := H(p(u,v), q(u,v))$. Тогава хамилтоновите системи

$$\left|\begin{array}{l} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H(p,q)}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \dfrac{\partial H(p,q)}{\partial p_i} \end{array}\right. \tag{4}$$

и

$$\left|\begin{array}{l} \dot{u}_i = -\dfrac{\partial \widetilde{H}(u,v)}{\partial v_i} \\ \dot{v}_i = \dfrac{\partial \widetilde{H}(u,v)}{\partial u_i} \end{array}\right. \tag{5}$$

са еквивалентни тогава и само тогава, когато смяната е канонична.

Доказателство. Ще разгледаме случая $n = 1$. Нека

$$p = p(u(p,q), v(p,q)), \tag{6}$$

$$q = q(u(p,q), v(p,q)). \tag{7}$$

Диференцирайки (6) по p и q, получаваме

$$p_u u_p + p_v v_p = 1\,, \qquad p_u u_q + p_v v_q = 0\,.$$

Оттук следва, че

$$p_u = \frac{v_q}{u_p v_q - u_q v_p}\,, \qquad p_v = -\frac{u_q}{u_p v_q - u_q v_p}\,.$$

Аналогично за (7) получаваме

$$q_u u_p + q_v v_p = 0\,, \qquad q_u u_q + q_v v_q = 1\,,$$

откъдето следва, че

$$q_u = \frac{v_p}{u_p v_q - u_q v_p}\,, \qquad q_v = -\frac{u_p}{u_p v_q - u_q v_p}\,.$$

Означаваме $u_p v_q - u_q v_p$ с D.

Нека D = 1. Тогава смяната е канонична съгласно дефиниция 2. Системите (4) и (5) са еквивалентни, защото $q_u = v_p$, $q_v = -u_p$, $p_u = v_q$, $p_v = -u_q$.

Нека (4) и (5) са еквивалентни. От (5) следва, че:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u_p \dot{p} + u_q \dot{q} = -u_p H_q + u_q H_p\,, \\ \dot{v} &= v_p \dot{p} + v_q \dot{q} = v_p H_q + v_q H_p\,. \end{aligned}$$

От друга страна

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= -\frac{\partial \widetilde{H}(u,v)}{\partial v} = -\frac{\partial H(p(u,v),q(u,v))}{\partial v} = H_p p_v - H_q q_v, \\
\dot{v} &= \frac{\partial \widetilde{H}(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial H(p(u,v),q(u,v))}{\partial u} = H_p p_u - H_q q_u,
\end{aligned}
$$

защото $\widetilde{H}(u,v) := H(p(u,v),q(u,v))$. Оттук получаваме, че

$$
u_q = -p_v, \quad u_p = -q_v, \quad v_q = p_u, \quad v_p = -q_u,
$$

което е изпълнено за $D = 1$.

Теоремата е доказана.

В хода на доказателството на теоремата получихме и трета, еквивалентна на първите две, дефиниция за каноничност на смяна на променливите, а именно: канонична е тази смяна, която запазва каноничния вид на уравненията на Хамилтон.

Дефиниция 3. Нека $(p,q) \to (I,\varphi)$ е канонична смяна, такава че $H = \widetilde{H}(I)$, където $p = (p_1,\ldots,p_n)$, $q = (q_1,\ldots,q_n)$, $I = (I_1,\ldots,I_n)$, $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$. В този случай $I_1,\ldots,I_n$ се наричат *променливи действие*, а $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ - *променливи ъгъл*.

Ако сме успели да пресметнем променливи действие-ъгъл, то уравненията на Хамилтон се интегрират лесно:

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_k &= -\frac{\partial \widetilde{H}(I)}{\partial \varphi_k} = 0, \\
\dot{\varphi}_k &= \frac{\partial \widetilde{H}(I)}{\partial I_k} = \omega_k(I),
\end{aligned}
$$

където с ω_k сме означили k–тата "честота". Очевидно

$$
\begin{aligned}
I_k &= \text{константа}, \\
\varphi_k &= \omega_k(t - t_0) = (\text{линейна по времето t функция}).
\end{aligned}
$$

Гергана Конакчиева, georgiana@abv.bg
Десислава Димитрова, desi_dimitrova@mail.bg