Уравнения на Хамилтон

Нека разгледаме две групи от n реални променливи

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

Двойките $(p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n)$ наричаме **спрегнати променливи**.

Нека $(p_i(t),\, q_i(t))$ са от една страна координатите на решението в $2n$–мерното пространство, а от друга – координатите на точка, движеща се в това $2n$–мерното пространство.

Да разгледаме функцията

$$H \;=\; H\left(p_1,\, p_2, \ldots, p_n,\, q_1,\, q_2, \ldots, q_n, t\right),$$

която е достатъчно на брой пъти диференцируема функция на двете групи от n променливи и времето t. Тази функция ще наричаме **функция на Хамилтон** или още **хамилтониан**.

Дефиниция. Системата уравнения от вида:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\[2ex] \dot{q}_i = \;\;\dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{array}\right. \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

където точката е диференциране по времето t, ще наричаме **уравнения на Хамилтон**.

Уравненията на Хамилтон са $2n$ на брой обикновени диференциални уравнения от първи ред. При съпоставка с уравненията от **задачата на Кеплер**, където имаме обикновени диференциални уравнения от втори ред, стигаме до извода, че посредством апарата на Хамилтон можем да редуцираме една система от уравнения от втори ред спрямо обобщените координати до друга по-проста и по-удобна система от $2n$ обикновени диференциални уравнения от първи ред, която ще наричаме **канонична**.

Нека сега въведем векторните означения

$$p \;=\; \left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right), \qquad q \;=\; \left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right),$$
$$\frac{\partial H}{\partial p} \;=\; \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right), \qquad \frac{\partial H}{\partial q} \;=\; \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial q_n}\right).$$

Тогава уравненията на Хамилтон (1) ще имат следния векторен запис:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\[2ex] \dot{q} = \;\;\dfrac{\partial H}{\partial p} \end{array}\right. \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Сега нека отговорим на въпроса как точно се определя функцията H, отчитайки някои нейни специфични особености. Нека представим H във вида

$$H \;=\; \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k p_k - T + U\,,$$

където $T = \dfrac{mV^2}{2}$ е кинетичната енергия на системата, $U = mgh$ е потенциалната енергия на системата, $\dot{q}_k$ са обобщените скорости, а p_k са обобщените импулси. Използваме, че

$$p_k \;=\; \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\,.$$

Тогава H може да се запише във вида

$$H \;=\; T + U.$$

От записа веднага стигаме до заключението, че всъщност H е **пълната енергия на системата**. Понякога вместо с H в специализираната литература пълната енергия на системата се обозначава с E. В настоящото изложение с H ще бележим пълната енергия. Така функцията на Хамилтон се изразява като сбор от кинетичната и потенциалната енергия на една система, като в конкретния случай това е Слънчевата система.

Понататъчният анализ на хамилтониана показва, че H трябва да е константна функция, но веднага се сблъскваме с факта, че при диференциране константата се нулира. Пояснението на това, се дава с по–детайлното разглеждане на функцията на Хамилтон, а именно като функция на $p(t)$ и $q(t)$. С други думи, спрямо времето t, функцията на Хамилтон

$$H \;=\; H\big(p(t), q(t), t\big) \;=\; \text{константа}\,.$$

Казано по друг начин, функцията H върху решенията $\big(p(t), q(t)\big)$ на уравненията на Хамилтон (2) е константа. Естественият извод, който се прави тук е, че енергията като функция е константа върху траекторията на една точка и нещо повече, тя е различна константа върху всички различни решения.

Следният пример визира връзката между уравненията на Хамилтон и уравненията, които получаваме при **задачата на Кеплер**.

Пример. Уравненията на движение съгласно **закона на Кеплер** имат следния вид:

$$m.(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \;=\; -\frac{\gamma.m.(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

където

$$\gamma \;=\; \frac{\mathcal{G} m_S{}^3}{(m_S + m_J)^2},$$

гравитационната константа $\mathcal{G} = 6,67241.10^{-8}\,\frac{sm^3}{g*sek^2}$, а m_S и m_J са съответно масата на слънцето и масата на Юпитер от **задачата на Кеплер**.

Забележка. Важно е да се разграничават (x, y, z) като координати на точката J от $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$, описващи траекторията на тази точка.

Уравненията, които получаваме при решаването на **задачата на Кеплер** не са хамилтонови, но чрез поредица от преобразувания могат да се доведат до уравнения, които са хамилтонови. Това става по следния начин:

Нека положим

$$\begin{aligned} p_1 &:= m\dot{x} \qquad q_1 := x \\ p_2 &:= m\dot{y} \qquad q_2 := y \\ p_3 &:= m\dot{z} \qquad q_3 := z. \end{aligned}$$

Да напишем функцията на Хамилтон $H = T + U$. Кинетичната енергия T на системата има вида

$$T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2},$$

а потенциалната енергия

$$U = -\frac{m\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Тогава

$$H = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Сега използваме новите координати и получаваме

$$\widetilde{H} := \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} - \frac{m\gamma}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}.$$

Нека сега да видим как изглеждат уравненията на Хамилтон. Това става по следния начин:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_1} = -\frac{m q_1 \gamma}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{3/2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\ddot{x} = -\frac{m x \gamma}{r^3},$$

където r е радиус–векторът на Юпитер, т.е.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_2} = -\frac{m q_2 \gamma}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{3/2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\ddot{y} = -\frac{m y \gamma}{r^3}, \\ \dot{p}_3 &= -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_3} = -\frac{m q_3 \gamma}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{3/2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\ddot{z} = -\frac{m z \gamma}{r^3}. \end{aligned}$$

Освен това имаме и

$$\dot{q}_1 = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{x} = \frac{m\dot{x}}{m},$$
$$\dot{q}_2 = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{y} = \frac{m\dot{y}}{m},$$
$$\dot{q}_3 = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{z} = \frac{m\dot{z}}{m}.$$

Така уравненията на Хамилтон с $\widetilde{H}(p, q)$ в тримерния случай се оказват еквивалентни на уравненията от **задачата на Кеплер** в $\mathbb{R}^3$.

Разглеждаме системата (2), където $p = (p_1, p_2, p_3)$ е **векторът на импулса**. Съпоставяйки уравненията на Лагранж и уравненията на Хамилтон стигаме до следния извод. Докато уравненията на Лагранж променливите са (координати, скорост), а в уравненията на Хамилтон – (координати, импулс). Нещо повече, уравненията на Хамилтон са **канонични**.

Аспея Алексиева, aspeia_al@yahoo.com