Уравнения на Хамилтон

На Хамилтон дължим редуцирането на система от n уравнения от втори ред спрямо обобщените координати на друга по-проста и по-удобна система от $2n$ обикновени диференциални уравнения от първи ред, наречена канонична.

Да разгледаме функцията $H(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)$, която ще наричаме диференцируема функция или още функция на Хамилтон, където $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$ са две групи от n реални променливи. Функцията на Хамилтон се нарича още *"хамилтониан"*.

Уравнения на Хамилтон наричаме системата

$$\left| \begin{array}{l} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{array} \right. , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Двойките $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_n, q_n)$ се наричат спрегнати променливи.

Ще покажем извеждането на системата (1). Нека си въведем функцията

$$H = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k p_k - T + U,$$

където $T = \frac{mV^2}{2}$ е кинетичната енергия, $U = mgh$ е потенциалната енергия, $\dot{q}_k$ са обобщени скорости, а p_k са обобщени импулси. Използваме, че

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}.$$

Тогава H може да се запише във вида $H = T + U$, което всъщност е пълната енергия.

За виртуалните премествания δq_k функцията на Хамилтон ще бъде

$$\delta H = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \delta p_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k. \tag{2}$$

Поради
$$p_k = \frac{\partial T}{\partial q_k},$$
за (2) получаваме
$$\delta H = \sum_{k=1}^{n} \dot{q_k} \delta p_k - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} \right) \delta q_k. \tag{3}$$

От друга страна, тъй като функцията на Хамилтон H е функция на p и q, т.е. $H = H(p, q)$, където $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, тогава имаме
$$\delta H = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k. \tag{4}$$

Тъй като δp_k и δq_k са произволни от сравнението на (3) и (4) получаваме
$$\sum_{k=1}^{n} \dot{q_k} \delta p_k - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k,$$
или
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\dot{q_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0.$$

Оттук получаваме
$$\dot{q_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0,$$
но
$$\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} = \dot{p_k},$$
откъдето
$$\dot{p_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

Да разгледаме пример за приложението на уравненията на Хамилтон при задачата на Кеплер.

Знаем, че закона на Кеплер има вида:
$$m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = -\frac{\gamma m(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

където $\gamma = m_A G_r$, а $m_A = \frac{m_s^2}{(m_s+m_I)^2}$ е масата на фиктивната планета I^*, G_r е гравитационна константа, чиято стойност е $6,67241.10^{-8}$. Тогава

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\gamma m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{\gamma m}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}},$$

където

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_1 = m\dot{x} & q_1 = x \\ p_2 = m\dot{y} & q_2 = y \\ p_3 = m\dot{z} & q_3 = z \end{array} \right\}, \tag{5}$$

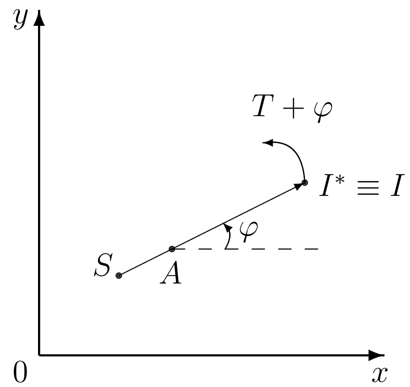
и уравненията на Хамилтон придобиват вида

$$\left| \begin{array}{l} \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\gamma m q_i}{(\dot{q_1}^2+\dot{q_2}^2+\dot{q_3}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} \end{array} \right. .$$

Приравняваме системата с (5) и получаваме

$$\left| \begin{array}{l} \ddot{x} = -\frac{\gamma m x}{(\dot{q_1}^2+\dot{q_2}^2+\dot{q_3}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{x} = \frac{m\dot{x}}{m} \end{array} \right. .$$

Правим по аналогичен начин същото за y и z, като получаваме резултата от задачата на Кеплер. Следователно уравненията на Хамилтон са еквивалентни на уравненията от задачата на Кеплер.



На графиката А е центърът на тежестта.

Десислава Захариева, kilimandjaro_afrika@yahoo.com
Драгомир Кръстев, e-mail : drago_kristev@hotmail.com