Външно диференциране

Да припомним свойствата на външното диференциране d.

1. Външното диференциране на k-форма дава (k+1)-форма:

$$d(k - \text{форма}) \;=\; (k+1) - \text{форма}.$$

2. Външното диференциране d е линейно:

$$d(\omega_1 + \omega_2) \;=\; d(\omega_1) + d(\omega_2).$$

3. Ако ω е следната k-форма

$$\omega \;=\; f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

то външният ѝ диференциал е

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n\right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

4. Антисиметричност на външното произведение:

$$dx_i \wedge dx_j \;=\; -dx_j \wedge dx_i\,.$$

В частност, при $i = j$ получаваме

$$dx_i \wedge dx_i \;=\; 0.$$

5. За всяка k-форма ω външният диференциал $d^2\omega = 0$. Наистина,

$$\begin{aligned} d\,(d\omega) &= d\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right] \\ &= d\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right] \\ &= \sum_{j<p}^{n} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_p} dx_j \wedge dx_p \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right] \\ &\quad + \sum_{j=p}^{n} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_p}\, dx_j \wedge dx_p \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right]. \end{aligned}$$

За да покажем, че първото събираемо е равно на нула, ще фиксираме тези j и p, за които съществуват (k+1)-формите

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_p} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_p\,\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Чрез последователно прилагане на свойствата (2) и (4) получаваме

$$d\,(d\omega) \;\;=\;\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\, dx_j \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \;=\; 0.$$

Маринела Николова, marinela_nikolova@abv.bg