Елементи на Делоне за Слънчевата система

Нека $r_k = (x_k, y_k, z_k)$ са декартовите координати на k-тата планета от Слънчевата система, m_k е масата ѝ, а

$$p_k = (p_k^x, p_k^y, p_k^z) = (m_k \dot{x}_k, m_k \dot{y}_k, m_k \dot{z}_k)$$

е нейният импулс, $k = 0, \ldots, 8$.

С помощта на производящата функция

$$S = \sum_{k=0}^{8} \left[\int\limits_{|r_k|_{min}}^{|r_k|} \sqrt{\frac{2m_k^2\gamma_k}{r} - \frac{G_k^2}{r^2} - \frac{m_k^4\gamma_k^2}{2L_k^2}}\, dr + G_k \arccos\left(\frac{x_k}{|r_k|}\cos\theta_k + \frac{y_k}{|r_k|}\sin\theta_k\right)\right]$$

правим смяна на променливите

$$(x_k, y_k, z_k, p_k^x, p_k^y, p_k^z) \to (L_k, G_k, \Theta_k, l_k, g_k, \theta_k),$$

като сме определили положителните константи по следния начин $\gamma_1 = \ldots = \gamma_8 = \mathcal{G}_r m_\odot$, $\gamma_\odot = \gamma_0 = \mathcal{G}_r m_5^3/m_\odot$, където:

$\gamma_\odot$ - положителната константа на Слънцето

m_5 - масата на Юпитер

$m_\odot$ - масата на Слънцето

$\mathcal{G}_r$ - гравитационната константа.

Да припомним, че по дефиницията за пораждаща функция,

$$\Theta_k := -\frac{\partial S}{\partial \theta_k}\,, \quad l_k := \frac{\partial S}{\partial L_k}\,, \quad \sqrt{g_k := \frac{\partial S}{\partial G_k}}\,.$$

Теорема: 1) *Елементите на Делоне $(L_k, G_K, \Theta_k, l_k, g_k, \theta_k)$ на k-тата планета са свързани с елиптичните елементи $(a_k, e_k, i_k, l_k, g_k + \theta_k, \theta_k)$ на k-тата планета както следва:*

$$\begin{aligned}
L_k &= m_k\sqrt{\gamma_k}\sqrt{a_k}, \\
l_k &= n_k(t - t_{0,k}) \ = \ \sqrt{\frac{\gamma_k}{a_k^3}}(t - t_{0,k})\,, \quad n_k \text{ е средното движение,} \\
& \quad\ t_{0,k} \text{ е моментът на преминаване през перихелия,} \\
G_k &= m_k\sqrt{\gamma_k}\sqrt{a_k}\sqrt{1-e_k^2} \ = \ \sqrt{1-e_k^2}L_k, \quad g_k \ = \ g_k, \\
\Theta_k &= m_k\sqrt{\gamma_k}\sqrt{a_k}\sqrt{1-e_k^2}\cos i_k \ = \ G_k\cos i_k, \quad \theta_k \ = \ \theta_k.
\end{aligned}$$

2) *Декартовите координати на k-тата планета се изразяват чрез орбиталните елементи $(a_k, e_k, i_k, l_k, g_k + \theta_k, \theta_k)$ по формулата*

$$r_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k & 0 \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_k & -\sin i_k \\ 0 & \sin i_k & \cos i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g_k & -\sin g_k & 0 \\ \sin g_k & \cos g_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k(\cos u_k - e_k) \\ a_k\sqrt{1-e_k^2}\sin u_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

където

$$\begin{aligned} a_k(\cos u_k - e_k) &= |r_k|.\cos v_k = a_k \left[-\frac{3}{2} e_k + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_s'(se_k)}{s} \cos(sl_k) \right], \\ a_k \sqrt{1-e_k^2}.\sin u_k &= |r_k|.\sin v_k = 2a_k \sqrt{1-e_k^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_s(se_k)}{se_k} \sin(sl_k). \end{aligned}$$

Изразявайки $(a_k, e_k, i_k, l_k, g_k + \theta_k, \theta_k)$ *като функции на елементите на Делоне, ще получим изразяване на декартовите координати чрез елементите на Делоне.*

3) *Функцията на Хамилтън за слънчевата система е*

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=0}^{8} \frac{\langle p_k, p_k \rangle}{2m_k} - \sum_{0 \le s < j \le 8} \frac{\mathcal{G}\, m_s m_j}{|r_s - r_j|} \\ &= -\sum_{k=0}^{8} \frac{m_k^3 \gamma_k^2}{2L_k^2} + \sum_{k=0}^{8} \frac{m_k \gamma_k}{|r_k|} - \sum_{0 \le s < j \le 8} \frac{\mathcal{G}\, m_s m_j}{|r_s - r_j|}, \end{aligned}$$

като в последния израз r_k *са изразени чрез елементите на Делоне.*

Доказателство:

1) Изразите за G_k и L_k се получават чрез прилагане на Лема 2. Изразът за Θ_k се получава чрез Лема 3. Изразът за l_k се получава чрез Лема 4.

2) Формулата за връзката на декартовите координати с елиптичните елементи е следствие от Лема 6, приложено за многомерния (и по-специално за 9-мерния) случай.

3) Съгласно Лема 1,

$$\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{m\gamma}{|r|} = \frac{\langle p, p \rangle}{2m} - \frac{m\gamma}{|r|} = -\frac{m^3 \gamma^2}{2L^2},$$

където $\bar{S}$ е напълно аналогична на всяка S_j в $S_0 + S_1 + .. + S_8 := S$. Следователно

$$\sum_{k=0}^{8} \frac{\langle p_k, p_k \rangle}{2m_k} = -\sum_{k=0}^{8} \frac{m_k^3 \gamma_k^2}{2L_k^2} + \sum_{k=0}^{8} \frac{m_k \gamma_k}{|r_k|},$$

което доказва **3)**.

Теоремата е доказана.

Пенка Георгиева, p_g@abv.bg
Венцислава Василева, ventsislavav@abv.bg