Елементи на Делоне $L, G, \Theta, l, g, \theta$ за задачата на Кеплер

Задача на Кеплер се дефинира по следния начин:

$$\left| \begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{\gamma m x}{r^3} \\ m\ddot{y} &= -\frac{\gamma m y}{r^3} \\ m\ddot{z} &= -\frac{\gamma m z}{r^3} \end{aligned} \right. \tag{1}$$

където:

(x, y, z) са координати на $J = J^*$,
$m = \frac{m_s m_j}{m_s + m_j}$ - масата на J^*,
$\gamma = \mathcal{G} m_A$,
$\mathcal{G} = 6,670.10^{-8} \frac{sm^3}{g.sek^2} =$ (гравитационната константа),
$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Като Хамилтонова канонична система задачата на Кеплер приема следния вид:

$$\left| \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right. \qquad , \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2}$$

където $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ са координати а $p_1 = m\dot{x}$, $p_2 = m\dot{y}$, $p_3 = m\dot{z}$ - импулси.

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{m\gamma}{r} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} - \frac{m\gamma}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}.$$

Формула (1) е еквивалент на формула (2).
Правим смяна на променливите:

$$(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \ \rightarrow \ (L, G, \Theta l, g, \theta)$$

чрез производяща функция S

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{\frac{2m^2\gamma}{r} - \frac{G^2}{r^2} - \frac{m^4\gamma^2}{L^2}} dr + G \arccos\left(\frac{q_1 \cos\theta}{r} + \frac{q_2 \sin\theta}{r}\right) \\ &= S(q_1, q_2, q_3, G, L, \theta) \end{aligned}$$

Теорема. *Елементите на Делоне - L, G, Θ, l, g, θ, където $(l, L), (G, g)$ и (Θ, θ) са спрегнати канонични променливи, се изразяват чрез орбиталните (елиптични) елементи*

a – дължина на голямата полуос на орбитата,
e – ексцентрицитета на орбитата,
i – наклонеността на плоскостта на орбитата,
l – средната аномалия,
$g + \theta$ – дължината на перихелия,
θ – дължината на възела,

както следва:

$$\begin{aligned} L &= m\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\,, \\ G &= m\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\sqrt{1-\varepsilon^2}\,, \\ \Theta &= m\sqrt{\gamma}\sqrt{a}\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos i\, = G\cos i\,; \end{aligned}$$

като при това l, g и θ съвпадат и в двата случая.

Елементите на Делоне - L, G, Θ, l, g, θ са константни с хамилтониан:

$$\widehat{H} \;=\; -\frac{m^3\gamma^2}{2L^2}.$$

и системата (уравненията на Хамилтон) са:

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{L} = -\dfrac{\partial H}{\partial l} = 0, & \dot{l} = \dfrac{\partial H}{\partial L} = n \\ \dot{G} = -\dfrac{\partial H}{\partial g} = 0, & \dot{g} = \dfrac{\partial H}{\partial G} = 0 \\ \dot{\Theta} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = 0, & \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial \Theta} = 0 \end{array} \right.$$

Доказателството на Теоремата се основава на следващите 7 леми.

Петя Брайнова, petia_brainova@abv.bg
Емил Солаков, esolakov@gmail.com