Връзка на елиптичните (орбитални) елементи с декартовите координати в $\mathbb{R}^3$

Нека (x, y, z) са декартовите координати на планетата в $\mathbb{R}^3$, а елиптичните (орбиталните) елементи са a, e, i, l, $g + \theta$, θ и имат следния смисъл:

а – дължина на голямата полуос

е – екцентрицитет

i – наклоненост на плоскостта на орбитата

l – средна аномалия

g+θ – дължина на перихелия

θ – дължина на възела .

Тогава:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

z_1 и z_2 са решенията на задачата на Кеплер в декартови координати и имат следните стойности:

$$\begin{aligned} z_1 &= a\Big(-\frac{3e}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k'(ke)}{k} \cos kl\Big) \\ z_2 &= a\sqrt{1-e^2} \cdot 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{ke} \sin kl \end{aligned}$$

където a е дължината на по-голямата ос, J_k е к-тия коефициент на Бесел, а $z_3 = 0$.

След умножение на първите три матрици и заместване на z_1 и z_2 с техните стойности, получаваме израза

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos g - \sin\theta\sin g\cos i & -\cos\theta\sin g - \sin\theta\cos g\cos i & sin\theta\sin i \\ \sin\theta\cos g + \cos\theta\sin g\cos i & -\sin\theta\sin g + \cos\theta\cos g\cos i & \cos\theta\sin i \\ \sin g\sin i & \cos g\sin i & \cos i \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} a\Big(-\frac{3e}{2} + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{J_k'(ke)}{k}\cos kl\Big) \\ a\sqrt{1-e^2} \cdot 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{ke}\sin kl \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В последната формула,

$l=\sqrt{\gamma}\,a^{-\frac{3}{2}}\,(t-t_0)$,
$l_0=l_{|t=0}=-\sqrt{\gamma}\,a^{-\frac{3}{2}}\,t_0$ е средната дължина на епохата,
$\gamma=\mathcal{G}.\,m_A=6,670.10^{-8}\frac{sm^3}{g.sek^2}\,\frac{m_S^3}{(m_S+m_J)^2}$,
$\mathcal{G}=6,670.10^{-8}\frac{sm^3}{g.sek^2}$ е гравитационната константа,
m_S е масата на Слънцето,
m_J е масата на планетата.

Ще пресметнем коефициентите $J_k(ke)$ и $J_k'(ke)$ за k = 1, 2, 3, 4 с точност до e^8. По дефиниция,

$$J_k(\omega)\;=\;\sum_{\substack{\alpha,\beta=0\\ \alpha-\beta=k}}^{\infty}\frac{(-1)^\beta}{\alpha!\,\beta!}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)^{\alpha+\beta}\;=\;\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{(-1)^\beta}{\beta!\,(\beta+k)!}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)^{\beta+2k}$$

В задачата на Кеплер аргументът на функцииите на Бесел има стойност $\omega=ke$ и

$$J_k(ke)\;=\;\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{(-1)^\beta}{\beta!\,(\beta+k)!}\Big(\frac{ke}{2}\Big)^{\beta+2k}$$

Ще покажем развитието на функцията на Бесел за $\mathbf{k=1,2,3,4}$ до e^8 с точност до $O(e^9)$.

При k = 1 :

$$\begin{aligned}
J_1(e)\;&=\;\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{(-1)^\beta}{\beta!\,(\beta+1)!}\Big(\frac{e}{2}\Big)^{\beta+2}\\
&=\;\frac{1}{2^2}\,e^2\;-\;\frac{1}{2^3.1!\,2!}\,e^3\;+\;\frac{1}{2^4.2!\,3!}\,e^4\;-\;\frac{1}{2^5.3!\,4!}\,e^5\;+\;\frac{1}{2^6.4!\,5!}\,e^6\;-\frac{1}{2^7.5!\,6!}\,e^7\\
&\quad+\;\frac{1}{2^8.6!\,7!}\,e^8\;+\;O(e^9)\\
&=\;\frac{1}{4}\,e^2\;-\frac{1}{16}\,e^3\;+\frac{1}{192}\,e^4\;-\frac{1}{4608}\,e^5\;+\frac{1}{184320}\,e^6\;-\frac{1}{11059200}\,e^7\\
&\quad+\;\frac{1}{928972800}\,e^8\;+\;O(e^9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1'(e)\;&=\;2\cdot\frac{1}{2^2}\,e\;-\;3\cdot\frac{1}{2^3.1!\,2!}\,e^2\;+\;4\cdot\frac{1}{2^4.2!\,3!}\,e^3\;-\;5\cdot\frac{1}{2^5.3!\,4!}\,e^4\;+\;6\cdot\frac{1}{2^6.4!\,5!}\,e^5\\
&\quad-\;7\cdot\frac{1}{2^7.5!\,6!}\,e^6\;+\;8\cdot\frac{1}{2^8.6!\,7!}\,e^7\;-\;9\cdot\frac{1}{2^9.7!\,8!}\,e^8\\
&=\;\frac{1}{2}\cdot e\;-\frac{3}{16}\cdot e^2\;+\frac{1}{48}\cdot e^3\;-\frac{5}{4608}\cdot e^4\;+\frac{1}{30720}\cdot e^5\;-\frac{7}{11059200}\cdot e^6\\
&\quad+\;\frac{8}{928972800}\cdot e^7\;-\frac{9}{104044953600}\cdot e^8
\end{aligned}$$

При k = 2 :

$$\begin{aligned}
J_2(2e) &= \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\beta!\,(\beta+2)!}\left(\frac{2e}{2}\right)^{\beta+4} \\
&= \frac{1}{2^4.1.\,2!}\,(2e)^4 \;-\frac{1}{2^5.1!\,3!}\,(2e)^5 \;+\frac{1}{2^6.2!\,4!}\,2e)^6 \;-\frac{1}{2^7.3!\,5!}\,(2e)^7 \;+\frac{1}{2^8.4!\,6!}\,(2e)^8 \\
&= \frac{1}{2}\,e^4 \;-\frac{1}{6}\,e^5 \;+\frac{1}{48}\,e^6 \;-\frac{1}{720}\,e^7 \;+\frac{1}{17280}\,e^8 \\
J_2'(2e) &= 8\cdot\frac{1}{2^4.1.\,2!}\,(2e)^3 \;-\; 10\cdot\frac{1}{2^5.1!\,3!}\,(2e)^4 \;+\; 12\cdot\frac{1}{2^6.2!\,4!}\,(2e)^5 \;-\; 14\cdot\frac{1}{2^7.3!\,5!}\,(2e)^6 \\
&\quad + 16\cdot\frac{1}{2^8.4!\,6!}\,(2e)^7 \;-\; 18\cdot\frac{1}{2^9.5!\,7!}\,(2e)^8 \\
&= 2\cdot e^3 \;-\frac{5}{6}\cdot e^4 \;+\frac{1}{8}\cdot e^5 \;-\frac{7}{720}\cdot e^6 \;+\frac{1}{2160}\cdot e^7 \;-\frac{1}{67200}\cdot e^8
\end{aligned}$$

При k = 3 :

$$\begin{aligned}
J_3(3e) &= \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\beta!\,(\beta+3)!}\left(\frac{3e}{2}\right)^{\beta+6} \\
&= \frac{1}{2^6.1.\,3!}\,(3e)^6 \;-\frac{1}{2^7.1!.\,4!}\,(3e)^7 \;+\frac{1}{2^7.2!.\,5!}\,(3e)^8 \\
&= \frac{243}{128}\,e^6 \;-\frac{729}{2048}\,e^7 \;+\frac{729}{20480}\,e^8 \\
J_3'(3e) &= 18\cdot\frac{1}{2^6.1.\,3!}\,(3e)^5 \;-\; 21\cdot\frac{1}{2^7.1!\,4!}\,(3e)^6 \;+\; 24\cdot\frac{1}{2^8.2!.\,5!}\,(3e)^7 \;-\; 27\cdot\frac{1}{2^9.3!\,6!}\,(3e)^8 \\
&= \frac{729}{64}\cdot e^5 \;-\frac{5103}{1024}\cdot e^6 \;+\frac{2178}{1280}\cdot e^7 \;-\frac{6561}{81920}\cdot e^8
\end{aligned}$$

При k = 4 :

$$\begin{aligned}
J_4(4e) &= \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\beta!\,(\beta+4)!}\left(\frac{4e}{2}\right)^{\beta+8} = \frac{1}{2^8.1.\,4!}\,(4e)^8 = \frac{32}{3}\,e^8 \\
J_4'(4e) &= 32\cdot\frac{1}{2^8.1.\,4!}\,(4e)^7 \;-\; 36\cdot\frac{1}{2^9.1!\,5!}\,(4e)^8 = \frac{256}{3}\,e^7 \;-\frac{64}{5}\,e^8
\end{aligned}$$

Иван Колев, ivan_kk@abv.bg
Златослава Христова, zlatoslava@abv.bg
Мария Анева, mariaaa@abv.bg