Метод на Линщед - Поанкаре за изключване на бързите променливи

Интегриращ оператор - $[\,.\,]^{\varphi}$ /интегрира се по φ дефинираме чрез сумата

$$[R(I,\varphi)]^{\varphi} := \sum_{s\in Z^n-\{0\}} \frac{R_s(I)e^{i\vec{s}\vec{\varphi}}}{i<\vec{s},\vec{\omega}(I)>},$$

където

$$\omega_j = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I_j}$$

е j-тата честота на непертурбирания хамилтониян $H_0(I)$.

Теорема на Линщед. *Съществува формална производяща функция*

$$S = J\varphi + \varepsilon S_1(J,\varphi) + \varepsilon^2 S_2(J,\varphi) + \cdots$$

където J е n-мерен вектор съответстващ на I, а $\varepsilon << 1$ е малък параметър, което води до смяна на променливите $(I,\varphi) \to (J,\psi)$, такава, че новият Хамилтониан има вида

$$\mathcal{H}(J,\psi) = H(I,\varphi) = \mathcal{H}_0(J) + \varepsilon\mathcal{H}_1(J) + \ldots + \mathcal{H}_{res}(J,\psi);$$

$\mathcal{H}_{res}$ са резонансните членове на Хамилтониана, които не можем да унищожим с метода на Линщед - Поанкаре.

Забележка. ε е формален малък параметър, като с начина на използването му искаме да кажем, че всяко следващо събираемо е на порядък по-малко от предходното му събираемо.

Доказателство на теоремата на Линщед. J и φ са n-мерни вектори. Съгласно дефиницията на пораждаща функция,

$$I := \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J + \frac{\varepsilon \partial S_1(J,\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon^2 \partial S_2(J,\varphi)}{\partial \varphi} + \ldots$$

Променливите действие $I \approx J$, защото $\varepsilon << 1$. Новите променливи ъгъл

$$\psi := \frac{\partial S}{\partial J} = \varphi + \frac{\varepsilon \partial S_1(J,\varphi)}{\partial J} + \frac{\varepsilon^2 \partial S_2(J,\varphi)}{\partial J} + \ldots$$

и $\psi \approx \varphi$, защото $\varepsilon << 1$.

Следователно, смяната на променливите е близка до идентитета. За второто уравнение прилагаме теоремата за неявната функция и изразяваме $\varphi = \varphi(J,\psi)$ като функция на J и ψ. След това заместваме $\varphi = \varphi(J,\psi)$ в първото уравнение $I = I(J,\psi)$ и така изразихме старите променливи действие-ъгъл (I,φ) чрез новите променливи действие-ъгъл (J,ψ). При това, ε е достатъчно малко и смяната е коректна.

Рекурентно ще дефинираме S_1, S_2 и т.н.:

$$\mathcal{H}(J,\psi) = H(I,\varphi) = H_0(J + \frac{\varepsilon \partial S_1}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon^2 \partial S_2}{\partial \varphi} + \ldots, \varphi) +$$

$$+\varepsilon R(J + \frac{\varepsilon \partial S_1}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon^2 \partial S_2}{\partial \varphi} + \ldots, \varphi) + \ldots$$

Развиваме в ред на Тейлър по ε:

$$\mathcal{H}(J,\psi) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J) + \varepsilon^2 H_2(J) + \ldots + H_{res}(J,\psi)$$

Приравняваме пред $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots$, като отначало започваме с ε^0:

$$H_0(J) = \mathcal{H}_0(J),$$

т.е. първоначалнят непретурбиран Хамилтониан не се изменя.

Приравняваме пред ε^1:

$$\frac{\partial H_0}{\partial J} . \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + R(J,\varphi) = \mathcal{H}_1(J)$$

Ще изберем такова S_1, че $\mathcal{H}_1(J)$ да не зависи от φ:

$$\omega(J) . \frac{\partial S_1(J,\varphi)}{\partial \varphi} + \sum_{s \neq 0} R_s(I) e^{i \vec{s} \vec{\varphi}} = \mathcal{H}_1(J),$$

а именно избираме $S_1 := -[R(J,\varphi)]^{\varphi}$. Тогава

$$\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{s \neq 0} \frac{R_s(I) e^{i \vec{s} \vec{\varphi}}}{i \vec{s} \vec{\omega}(I)}$$

и получаваме

$$\omega(J)\frac{\partial S_1}{\partial\varphi} = -\omega(J)\sum_{s\neq 0}\frac{R_s(J)e^{is\varphi}}{is\omega(J)}.is = -\sum R_s(J)e^{is\varphi} = -R(J,\varphi)\,.$$

Следователно

$$\frac{\partial H_0}{\partial J}.\frac{\partial S_1}{\partial\varphi} + R(J,\varphi) = \mathcal{H}_1(J),$$

което искахме да постигнем.

Приравняваме пред ε^2:

$$\frac{\partial H_0}{\partial J}.\frac{\partial S_2}{\partial\varphi} + R(J,\varphi) = \mathcal{H}_2,$$

което е изпълнено при

$$S_2 := -[R(J,\varphi)]^\varphi.$$

Приравняваме пред ε^3:

$$\frac{\partial H_0}{\partial J}.\frac{\partial S_3}{\partial\varphi} + R_3(J,\varphi),$$

което е изпълнено при

$$S_3 := -[R_3(J,\varphi)]^\varphi\,.$$

Описаната процедура на изключване на хармониките $e^{ik\varphi}$ чрез интегриращ оператор е възможна само когато скаларното произведение $\neq 0$. В противен случай, тъй като при интегрирането $[]^\varphi$, това скаларно произведение се появява в знаменателя:

$$\left[e^{ik\varphi}\right]^\varphi = \frac{e^{ik\varphi}}{ik\varphi},$$

и имаме делене на 0.

Може да се докаже, че съществуват краен брой такива хармоники, наречени резонансни, които не се поддават на изключване чрез метода на Линщед. Те си остават в крайния вид на новия Хамилтониан, включени в събираемото $\mathcal{H}_{res}(J,\psi)$.

Даниела Анастасова, daniela.anastasova@bts-bg.com
Огнян Найденов, ognian_naidenov@abv.bg