# Метод на Линдщед - Поанкаре

Нека

$$H \;=\; H_0(I) + R(I,\varphi)$$

е хамилтониан, близък до интегруем, т.е. $H_0(I) \gg R(I,\varphi)$. Нека $\varepsilon \ll 1$ е малък параметър такъв, че

$$H \;=\; H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\varphi) + \varepsilon^2 H_2(I,\varphi) + \cdots ,$$

където $|H_0| \geq |H_j(I,\varphi)|$.

Винаги можем да изберем $H_j(I,\varphi)$ да са полиноми по $I$ и тригонометрични полиноми по $\varphi$. Функцията $R(I,\varphi)$ може да се развие в ред на Фурие, тъй като е периодична по $\varphi$. След като я развием в безкрайна сума групираме събираемите, като на всяка група присвояваме $H_1, H_2, H_3, \dots$. Остатъкът от реда след като бъде сумиран дава число по-малко от $\epsilon = \frac{1}{100}$. Аналогично всяка функция $H_j(I,\varphi)$ можем да я приближим с полином.

Ако $H_j(I,\varphi)$ е аналитична функция в някъква област, а това е изпълнено за Слънчевата система, то горното твърдение е изпълнено, защото коефициентите на Фурие на $H_j(I,\varphi)$ намаляват експоненциално бързо.

**Теорема.** *На хамилтониана H, винаги можем да изберем „полиномиално разлагане“:*

$$H \;=\; H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\varphi) + \varepsilon^2 H_2(I,\varphi) + \cdots$$

*относно малкия параметър $\varepsilon$ така,че непертурбираният хамилтониан да е резонансен.*

*Съществува близка до индентитета канонична смяна на променливите*

$$(I,\varphi) \;\;\to\;\; (J,\psi),$$

*изключваща от хамилтониана бързите променливи.*

$$\mathcal{H}(J,\psi) \;=\; \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1(J) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(J) + \cdots .$$

**Доказателство.** Трябва да докажем само втората част на теоремата. Търсим пораждаща функция на $(I,\varphi) \to (J,\psi)$.

$$S(I,\psi) \;=\; (I,\psi) + \varepsilon S_1(I,\psi) + \varepsilon^2 S_2(I,\psi) + \cdots .$$

Трябва да намерим $S_1, S_2, \dots$. Параметърът $\varepsilon$ е изкуствено въведен, за да може да се осигури намирането на $S_1, S_2, \dots$ стъпка по стъпка.

$$\varphi \;:=\; \frac{\partial S}{\partial I} \;=\; \psi + \varepsilon \frac{\partial S_1(I,\psi)}{\partial\, I} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2(I,\psi)}{\partial\, I} + \cdots ,$$

$$J \;:=\; \frac{\partial S}{\partial \psi} \;=\; I + \varepsilon \frac{\partial S_1(I,\psi)}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2(I,\psi)}{\partial \psi} + \cdots .$$

Ще определим рекурсивно $S_1, S_2, \ldots$. В $\mathcal{H}(J) = H(I,\varphi)$ заместваме J и $\varphi$ с равните им.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_0\Big(I+\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\psi}+\varepsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial\psi}+\ldots\Big)+\varepsilon\mathcal{H}_1\Big(I+\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\psi}+\varepsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial\psi}+\ldots\Big)+\\
&+\varepsilon^2\mathcal{H}_2\Big(I+\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\psi}+\varepsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial\psi}+\cdots\Big)+\ldots\\
=\ &H_0(I)+\varepsilon H_1\Big(I.\psi+\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial I}+\varepsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial I}+\cdots\Big)\\
&+\varepsilon^2 H_2\Big(I.\psi+\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial I}+\varepsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial I}+\cdots\Big)+\cdots\ .
\end{aligned}$$

Развиваме лявата част по $I_1,\ldots,I_n$ и дясната част по $\psi_1,\ldots,\psi_n$ в ред на Тейлър около точката $(I,\psi)=(I_1,\ldots,I_n,\psi_1,\ldots,\psi_n)$.

След като приравним пред степените на $\varepsilon$, получаваме:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0\ &:\ \mathcal{H}_0(I)=H_0(I)\\
\varepsilon^1\ &:\ \frac{\partial\mathcal{H}_0(I)}{\partial I}\cdot\frac{\partial S_1(I,\psi)}{\partial\psi}+\mathcal{H}_1(I)=H_1(I,\psi)\\
\varepsilon^2\ &:\ \frac{\partial\mathcal{H}_0(I)}{\partial I}\cdot\frac{\partial S_2(I,\psi)}{\partial\psi}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial^2\mathcal{H}_0(I)}{\partial I^2}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial\psi}+\frac{\partial\mathcal{H}_1(I)}{\partial I}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial\psi}=\\
&=\frac{\partial H_1(I)}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial I}+H_2(I)
\end{aligned}$$

и т. н.

По този начин получаваме $S_1, S_2, \ldots$ съответно от изразите за $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots$.

Нека да означим с A и с B изразите:

$$A=\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}\mathcal{H}_j(I)}{\partial I_1^{m1}I_2^{m_2}\ldots I_n^{m_n}}\cdot\frac{\partial S_{r_{1,1}}}{\partial\psi_1}\cdot\frac{\partial S_{r_{1,2}}}{\partial\psi_1}\cdots\frac{\partial S_{r_{1,m_1}}}{\partial\psi_1}\cdots\frac{\partial S_{r_{n,1}}}{\partial\psi_n}\cdot\frac{\partial S_{r_{n,2}}}{\partial\psi_n}\cdots\frac{\partial S_{r_{n,m_n}}}{\partial\psi_n}$$

$$B=\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}\mathcal{H}_j(I,\psi)}{\partial\psi_1^{m1}\psi_2^{m_2}\ldots\psi_n^{m_n}}\cdot\frac{\partial S_{r_{1,1}}}{\partial I_1}\cdot\frac{\partial S_{r_{1,2}}}{\partial I_1}\cdots\frac{\partial S_{r_{1,m_1}}}{\partial I_1}\cdots\frac{\partial S_{r_{n,1}}}{\partial I_n}\cdot\frac{\partial S_{r_{n,2}}}{\partial I_n}\cdots\frac{\partial S_{r_{n,m_n}}}{\partial I_n}$$

Тогава пред $\varepsilon^N$ имаме тъждеството:

$$\begin{aligned}
0\ &=\ \sum_{N,j\geq 0,r_{i,s}\geq 1,m_i\geq 1}\frac{1}{(m_1+\cdots+m_n)!}\cdot[A-B]\\
&=\ \frac{\partial H_0(I)}{\partial I}\cdot\frac{\partial S_N(I,\psi)}{\partial\psi}+F_N(H_0,H_1,...,H_N,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,...,\mathcal{H}_{N-1},S_1,S_2,...,S_{N-1})
\end{aligned}$$

където

$$N\ =\ j+r_{1,1}+\cdots+r_{1,m_1}+r_{2,1}+\cdots+r_{2,m_2}+\cdots+r_{n,1}+\cdots+r_{m,m_n}.$$

Полагаме

$$S_N(I,\psi) \;:=\; [F_N]^\psi \;=\; \sum_{S\in Z^n\setminus\{0,\dots,0\}} \frac{i(F_N)_S\; e^{iS\psi}}{S\omega(I)}$$

и тогава

$$(F_N)_S \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} F_N(I,\psi)\, e^{-iS\psi} d\psi_1\dots d\psi_n\,;$$

следователно,

$$\begin{aligned}
0 &= \omega(I)\frac{\partial S_N(I,\psi)}{\partial\psi} + F_N(\mathcal{H}_0,\dots,\mathcal{H}_n,S_1,\dots,S_{N-1}) + \mathcal{H}_N(I)\,,\\
\mathcal{H}_N(I) &= -\omega(I)\frac{\partial S_N}{\partial\psi} - F_N = \omega(I)\sum_{S\neq(0,\dots0)}\frac{-i(F_N)_S\; e^{iS\psi}}{S\omega(I)}S - F_N\\
&= \sum_{S\neq(0,\dots0)} (F_N)_S\; e^{iS\psi} - F_N = -(F_N)_0\\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} F_N\; d\psi_1\dots d\psi_n = \langle\, F_N\,\rangle^\psi\,,
\end{aligned}$$

където $\langle\, F_N\,\rangle^\psi$ е, по дефиниция, усредняването на $F_N$ по $\psi$.

Теоремата е доказана.

Христена Атанасова, htoshkova@mail.bg
Деница Белчева, denkv@yahoo.com