Разлагане в ред на Фурие

Във физиката и техниката периодичните процеси играят важна роля. Те се появяват обикновено като механични или електрически трептения, вълнови и въртеливи движиния и др.

За описанието на такъв род явления и процеси се използват периодични функции, като функциите косинус и синус играят основна роля. Представянето на периодични функции посредством редове по синус и косинус е важна математическа задача. Редове от посочения вид се наричат **редове на Фурие** в чест на известния френски математик.

Под **периодична функция** се разбира функция $f(x)$, удовлетворяваща равенството от вида $f(x) = f(x+L)$ за всяко $x \in R$, където L е положителна константа, наричана **период**. Функциите $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$ при $n \in N$ имат период $L = \frac{2\pi}{n}$. Вижда се, че 2π е също техен период.

Функциите $\psi(x) = 1$, $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$, $n \in N$ образуват тригонометрична система от функции. Всяка периодична функции $f(x)$ с период $L > 0$ може лесно да се трансформира във функция с период 2π. Затова се полага $x = \frac{tL}{2\pi}$, от където се получава $\varphi(t) = f\left(\frac{tL}{2\pi}\right)$. Функцията $\varphi(t)$ има период 2π.

Ще разгледаме т. нар. **ортогонални свойства** на тригонометричните функции. Нека m и n са естествени числа.

Дефиниция. Величините

$$
\begin{aligned}
C_{mn} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx, \\
S_{mn} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx, \\
T_{mn} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx.
\end{aligned}
$$

се наричат **интеграли на Фурие.**

Тъй като функцията $\sin mx \cos nx$ е нечетна, то за всяка двойка m, n важи $T_{mn} = 0$. Функциите $\cos mx \cos nx$ и $\sin mx \sin nx$ са четни и съгласно това важи:

$$
\begin{aligned}
C_{mn} &= 2\int_{0}^{\pi} \cos mx \cos nx dx, \\
S_{mn} &= 2\int_{0}^{\pi} \sin mx \sin nx dx.
\end{aligned}
$$

Да приемем, че функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[-\pi, \pi]$. Числата

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\lambda}^{\pi} f(x)dx, \end{aligned}$$

където $n = 1, 2, \ldots,$ се наричат **коефициенти на Фурие** за функцията $f(x)$ в интервала $f(x)$ в интервала $[-\pi, \pi]$.

Ако $f(x)$ е нечетна функция, за всяко $n \in N$ важи $a_n = 0$ и

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Ако $f(x)$ е **четна** функция, за всяко $n \in N$ важи $b_n = 0$ и

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx. \end{aligned}$$

Дефиниция. Функционен ред от вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

се нарича **тригонометричен ред на Фурие** или за краткост **ред на Фурие**.

Реалните величини $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ се наричат **коефициенти на реда**. Ако $f(x)$ е нечетна, тя има развитие в ред по синуси, а ако $f(x)$ е четна, тя има развитие в ред по косинус.

Ще разгледаме реда на Фурие в комплексен запис. Този вид запис при процеси, свързани с трептения, се оказва много полезен и икономичен в техническите приложения на анализа на Фурие. Такъв запис се използва в електротехниката, аеродинамиката и др.

От равенството $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ се получават зависимостите

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad , \qquad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Така разлагането в ред на Фурие придобива вида:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx} \,,$$

където $\alpha_n \equiv \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ и $a_{-n} \equiv a_n$, $b_{-n} \equiv -b_n$, $b_0 \equiv 0$ и $\alpha_{-n} \equiv \frac{1}{2}a_{-n} - ib_{-n}$, където $n = 1, 2, \ldots$

Забележка. При описание на трептения физици и технически специалисти използват записа

$$f(u) \;=\; \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t},$$

където $\omega > 0$ е кръговата честота на трептението. Удобството на това представяне се състои във възможността да се използва освновна зависимост $e^{p+q} = e^p e^q$.

Евгения Арнаудова, fn10873@fmi.uni-sofia.bg