

4. Модел на Лесли за популации с възрастова структура

Моделът на Лесли (Leslie) отчита възрастовата структура на популацията и влиянието и върху нея и основните процеси в една популация. Този модел е един от най-добрите начини да опишеш растежа на популацията. Популацията е група индивиди от един биологичен вид, които населяват трайно част от ареала на вида, имат сходни екологични изисквания, кръстосват се свободно помежду си и оставят плодовитото поколение. Основните функции на проста популация са храненето и размножаването. Примерно при малки популации (като тези на амебите) – няма възрастова структура.

Представяме времето на една популация разделено. В момент t популацията е разделена на n групи според възрастов признак: $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ – вектор описващ популацията в момент t . В този вектор всеки елемент $x_i(t)$ представлява брой индивиди, съответстващи на дадения клас.

Възпроизводство – раждаемостта зависи от всички числености.

$B_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i x_i$, $b_i > 0$ – възпроизводството е пропорционално на числеността. С b_i ще означаваме въдпроизводството, плодородието на възрастовия клас i .

$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = s_i x_i$, $0 < s_i \leq 1$ – раждаемостта (съпреживяването) е пропорционално на числеността. Или със s_i ще означаваме броя на тези индивиди, които оцеляват от i -тия клас до $(i+1)$ -ия.

Валидни е следната рекурентна зависимост между възрастовите класове в следващ момент $t+1$:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \sum_{i=1}^n b_i x_i - \text{новородени} \\ x_{i+1}(t+1) = s_i x_i(t), i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Т.е. броят индивиди в следващия момент зависи от числеността на всички възрастови класове, взети със съответната раждаемост.

Следната матрица наричаме оператор на Лесли:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Тази матрица е неотрицателна. Тя е квадратна, с размерност равна на броя възрастови групи. В така построената матрица клетката (i, j) индикира колко индивида ще бъдат в i -тия възрастов клас при следващ момент, получени от индивидите от j -тия клас. Открита е следната зависимост между векторите, описващи по възрастови групи една популация в моменти t и $t+1$:

$$x(t+1) = L \cdot x(t)$$

Ако приемем, че $x(0)$ е инициализиращ, начален вектор на популацията, то горната формула е еквивалентна на:

$$x(0) > 0$$

$$x(t) = L^t \cdot x(0)$$

Да разгледаме следната теорема:

Th. (P-F.) Ако $A_{n \times n}$ е неотрицателна, неособена и неразложима матрица (т.е.

$A \neq \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix}, B, C - \text{квадратни}$), то максималната собствена стойност е $r > 0$ и ѝ съответства собствения вектор $x_r \geq 0$.

Очевидно L е обратима, следователно тя е неособена. Да се опитае да разгледаме характеристичното уравнение на матрицата L , ако нейната размерност е 3:

$$|\lambda \cdot I - \mathcal{L}| = \begin{vmatrix} \lambda - b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -s_1 & \lambda & 0 \\ 0 & -s_2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - b_1 \lambda^2 - b_3 s_1 s_2 - b_2 s_1 \lambda = 0$$

(ако $\mathcal{L} \in M_{3 \times 3}$, I е единичната матрица)

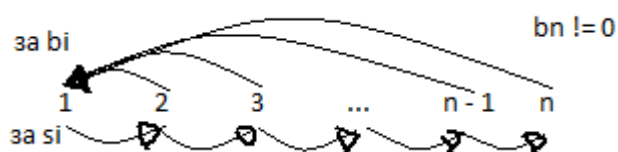
$$-b_3 s_1 s_2 \neq 0, s_1, s_2 \neq 0 \Rightarrow b_3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Най-възрастната група е репродуктивна.

Ще използваме и следната теорема, за да покажем, че матрицата на Лесли е неразложима.

Th. (Теорема за връзка м/у граф и матрица, определяща неразложимост) Ако на матрицата $A_{n \times n}(a_{ij})$ съпоставим ориентиран граф $G(X, E)$, $|X| = n$, $e_{ij} \in E$, ако $a_{ji} \neq 0$, то ако G е силно свързан (от всеки до всеки връх има път), то матрицата A е неразложима.

Представяме матрицата L в графова репрезентация по начина, описан в теоремата. Имаме n на брой върха на фигурата. Ребрата $(i, 1)$, където $i = 2, 3, \dots, n$, са получени от това, че клетката $(1, i)$ в матрицата на Лесли не е 0. Аналогично, ребрата $(i, i+1)$, където $i = 1, 2, \dots, n-1$, се построяват, поради факта, че клетката $(i, i+1)$ е ненулево число.



Така можем вече да приложим последната теорема. Очевидно построенят граф е силно свързан.

Тогава, от предходната теорема следва, че максималната собствена стойност на матрицата на Лесли е положително число. Т.е. последният клас от възрастовите групи е репродуктивен.

$\mathcal{L}_r = r \cdot x$ - вектор с неотрицателни коефициенти

Лесли е приложил своя модел върху процеси, свързани с промишления риболов.

Така е стигнал до следните изводи:

$$\sum_{i=1}^n x_i > \bar{N} \Rightarrow x(t+1) = \bar{L} \cdot x(t), \quad \bar{r} < 1 \text{ - ако има много риба}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i < \bar{N} \Rightarrow x(t+1) = \underline{L} \cdot x(t), \quad \underline{r} < 1 \text{ - при изтощение на пасажите от риба}$$