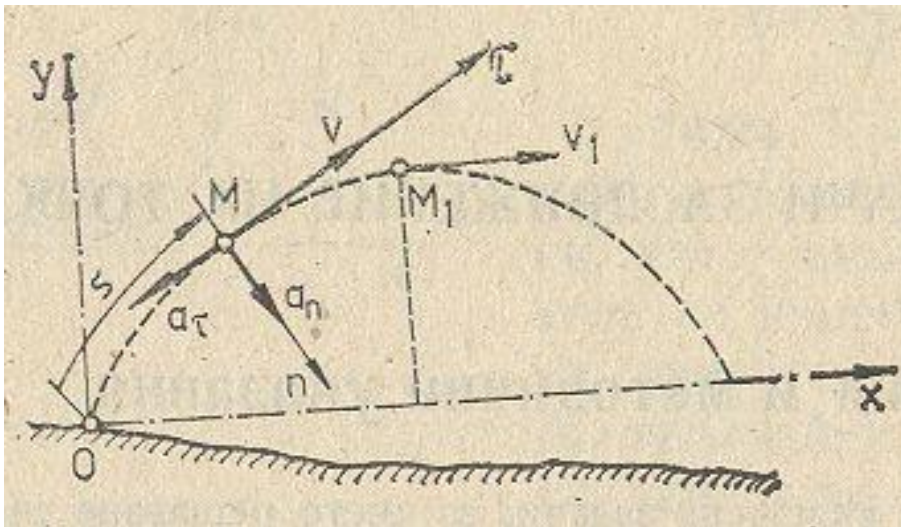
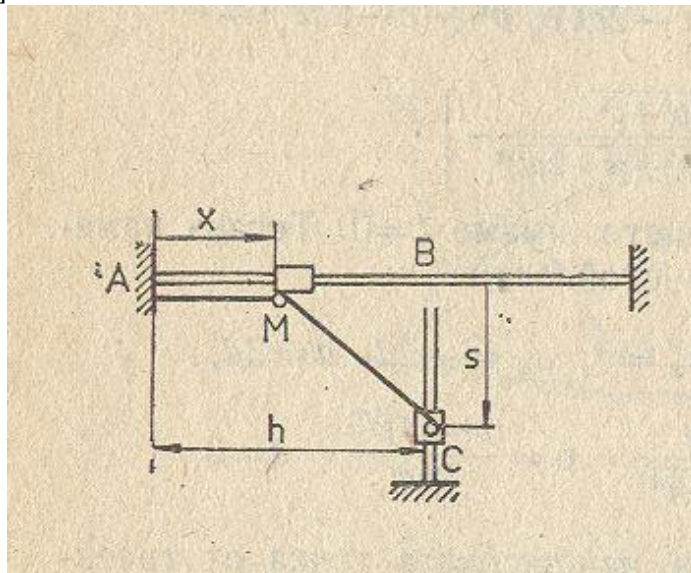


Задачи за движение на точка

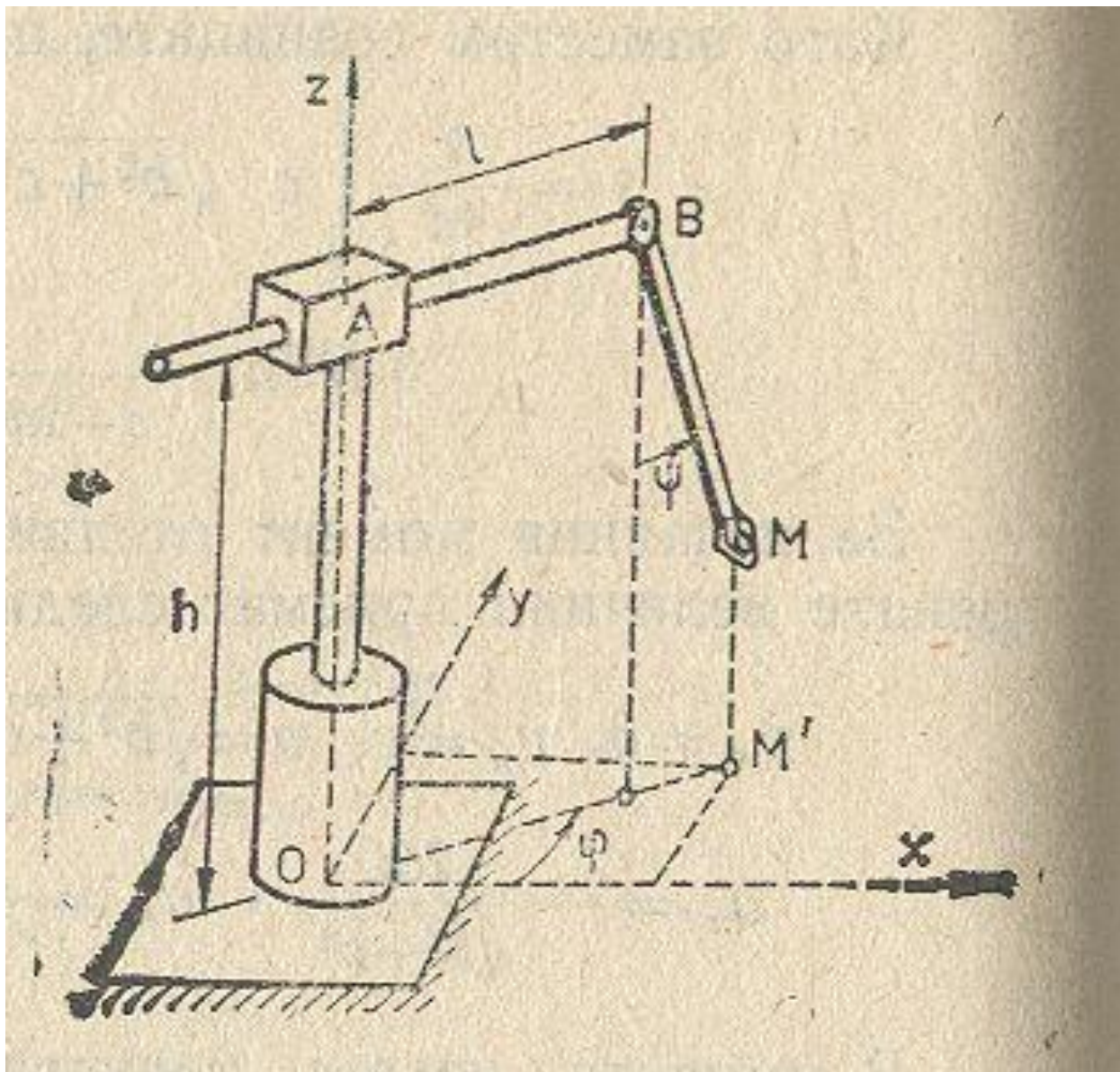
1. Точка се движи във вертикална равнина съгласно закона $x = bt, y = ct - dt^2$, където b, c и d са константи. Да се определят траекторията, скоростта, ускорението и радиуса на кривина на траекторията на точката, а така също и нейният естествен закон за движение. Да се намерят стойностите на тези величини в най-високата точка от траекторията.
- 2.



3. Неразтегаема нишка АМС с дължина $l=6[m]$ свързва неподвижната точка А с плъзгача С посредством междинната ролка М. Да се определят скоростта и ускорението на плъзгача С, ако ролката М се движи по закона $x=0,1t$. Дадено е $h=5[m]$ и $t<50[s]$.

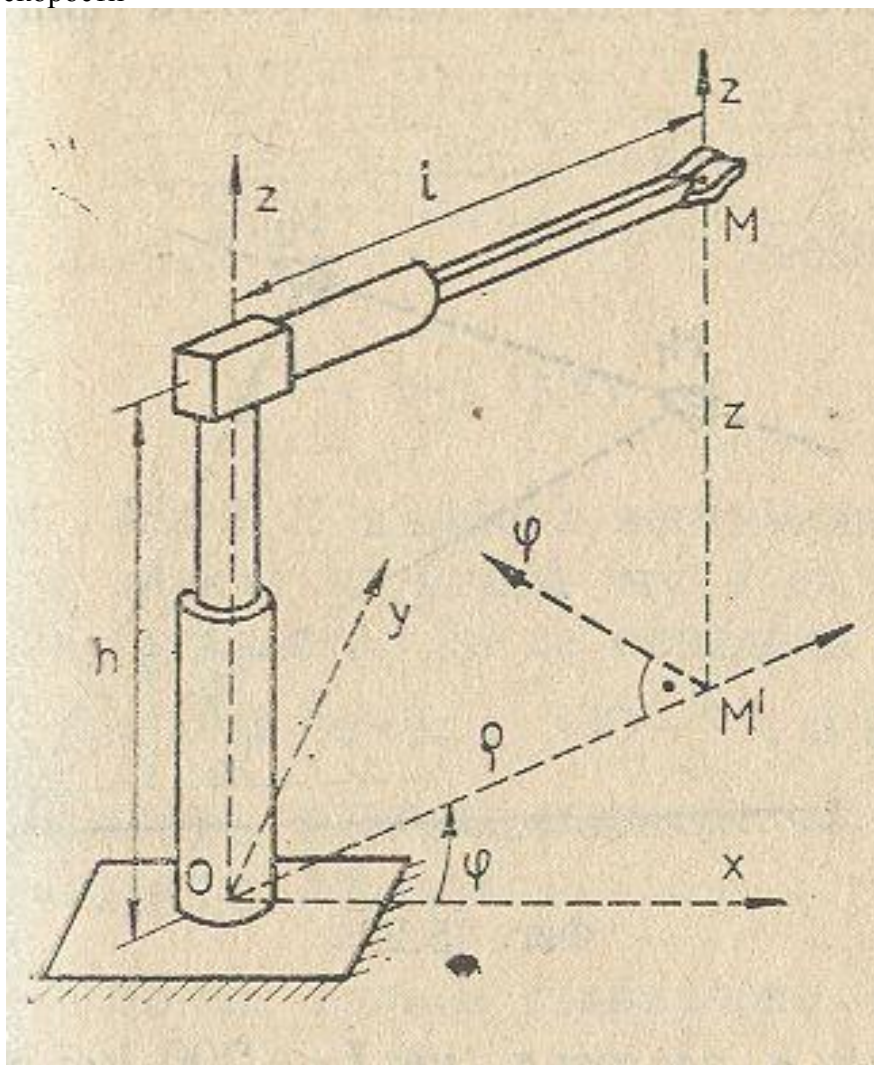


4. Манипулатор с четири управляеми параметъра има устройство, показано на фигурата. Движението му се определя с координатите $\varphi(t), h(t), \psi(t)$, да се определят скоростта и ускорението на точката М в момента $t=2[s]$ след тръгването ѝ. Дадени са: $\varphi(t)=0.1t^2[rad]$, $h(t)=0.5(1-e^{-t})[m]$, $\psi(t)=0.2(1-e^{-t})[rad]$, $l=0.3+0.1t[m]$ и $L=BM=0.6[m]$



5. Манипулатор се състои от въртящо устройство, колона с вертикално преместване и ръка придвижваща е във хоризонтално направление, като положението му се

определя с 3 управляеми параметъра. Да се определи скоростта и ускорението на центъра М на хващача, ако управляемите координати се изменят равномерно със скорости $\dot{l} = a_l, \dot{h} = a_h, \dot{\varphi} = a_\varphi$



6. Точка се движи по закона $r = \frac{8b}{1+k^2t^2}$, $\varphi = 2\arctg kt$, където b и k са константи. Да се определят траекторията, скоростта, ускорението и радиусът на кривина на траекторията на точката, както и нейният естествен закон на движение.

Движение на точка изхвърлена наклонено спрямо хоризонта.

Зад. Една точка (например куршум) е изстреляна от точка О, която приемаме за начало на координатната система с начална скорост v_0 , сключваща с хоризонталната ос ОХ ъгъл равен на α . Да се определят тангенциалното и нормалното ускорение, както и радиуса на кривина на траекторията, ако е известно, че точката се движи по закона:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Коментар:

Земно ускорение g се отнася до [гравитационната сила на привличане](#), която изпитват всички тела в близост до земната повърхност. Приблизителната му *средна* стойност е $9,80665 \text{ m/s}^2$ (за практически нужди $9,8 \text{ m/s}^2$ или 10 m/s^2). Действителните стойности варират от $9,789 \text{ m/s}^2$ на екватора до $9,823 \text{ m/s}^2$ на полюсите.

Интерпретацията на земното ускорение е, че в отсъствие на съпротивление на въздуха [скоростта](#) на всички свободно падащи тела всяка секунда се увеличава с $9,8 \text{ m/s}$. Земното ускорение е [вектор](#) с посока към центъра на [Земята](#).

Закона за движение се получава като се вземе в предвид, че една точка изхвърлена с начална скорост v_0 , се движи близо до повърхността на земята под действие на теглото си с ускорение, равно на земното. Това твърдение е вярно, ако пренебрегнем съпротивлението на въздуха. За ускоренията по осите на декартова координатна система може да се напише:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad \ddot{z} = 0$$

Като интегрираме веднъж тези уравнения и вземем в предвид, че началната скорост v_0 сключва ъгъл α с оста Ох намираме скоростите:

$$\dot{x} = v_x = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y} = v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad \dot{z} = v_z = 0$$

Получените уравнения показват, че точката се движи равномерно по оста Ох и равнозакъснително по оста Оу. Освен това условието $v_z = 0$ показва че точката се движи във вертикалната равнина и траекторията ѝ е равнинна крива.

Ако се интегрират уравненията за скоростите се получава закона за движение на точката който е в условието на задачата. Вземат се в предвид, че $x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0$.

Решение:

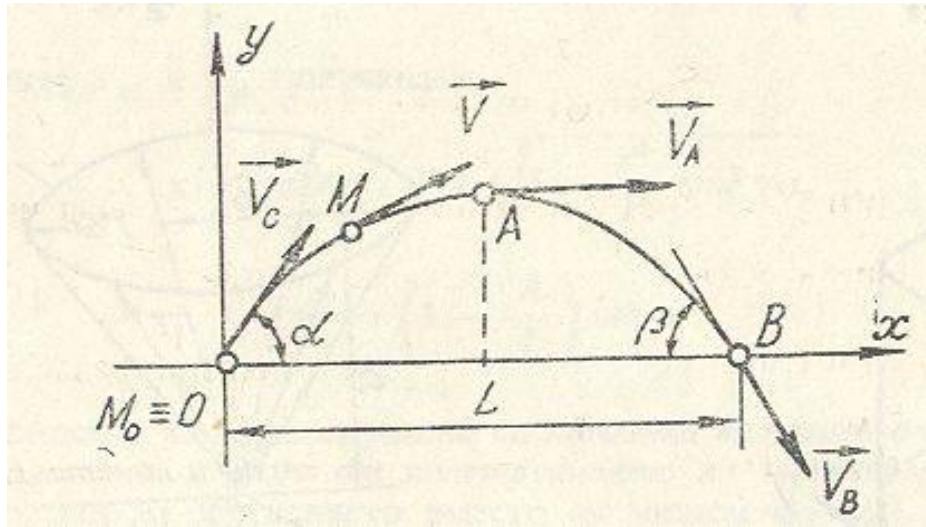
От първото уравнение следва:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

Като заместим във второто намираме уравнението на траекторията:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

Кое е уравнение на парабола.



Да намерим пресечната точка на траекторията с хоризонталната ос. Като положим $y=0$, получаваме квадратното уравнение

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0$$

Корените на това уравнение са:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

За x_2 се получава от $\operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_2 = 0$, следва:

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_2 = \operatorname{tg} \alpha, \rightarrow x_2 = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g}, \rightarrow x_2 = \frac{v_0^2 2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}, \rightarrow x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Първият корен $x_1 = 0$ съответства на началното положение на точката (точка на изстрелване). Вторият корен определя далечината на полета L . Той съответства на точката на приземяване. Ако $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sin \alpha > 0$ и L е реално число. Ако $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, траекторията е разположена изцяло под оста OX и няма втора пресечна точка с нея.

Нека сега видим кога е най-голяма далечината на полета $L_{\max}$. При дадена начална скорост v_0 максималната стойност на L се получава при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. В този случай имаме:

$$L_{\max} = x_{2\max} = \frac{v_0^2 \sin 2 \frac{\pi}{4}}{g} = \frac{v_0^2}{g}$$

И така, ако изстреляме точка с една и съща начална скорост, но при различни ъгли α , най-далече отива онази точка която е изстреляна под ъгъл $\alpha = 45[\text{deg}]$

Сега нека намерим максималната височина на точката, За целта забелязваме, че когато $y = y_{\max}$, то $v_y = 0$, откъдето намираме

$$v_{yA} = v_0 \sin \alpha - gt_A = 0, \quad t_A = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$$

Тук с t_A е отбелязан момента, в който точката се намира във върха на траекторията си. Като заместим t_A в уравненията на движение получаваме:

$$\left| \begin{aligned} x_A &= \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha = \frac{L}{2} \\ y_A &= \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \end{aligned} \right.$$

Да пресметнем ъгъла, който сключва скоростта с хоризонталната ос в точката на падането В. Намираме:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

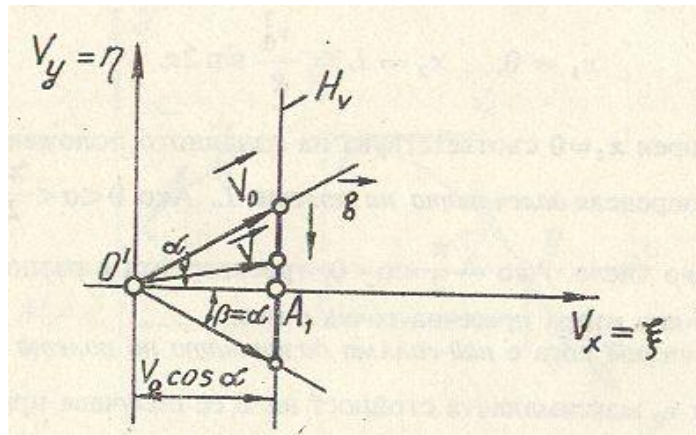
По специално за точка В полагаме $x_B = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (корена x_2) и намираме

$$\operatorname{tg}(\pi - \beta) = y'_B = \operatorname{tg} \alpha - 2\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha$$

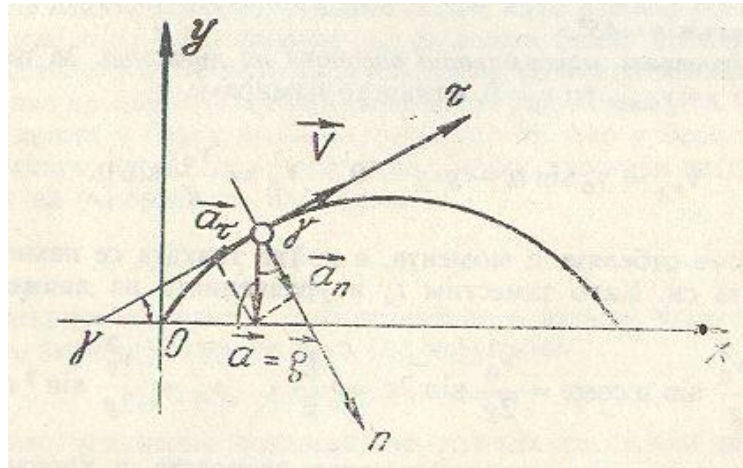
Откъдето следва, че $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$. Следователно ъгълът, който скоростта сключва с хоризонта в точката на падането, е равен на ъгъла в точката на изстрелването.

Ходограф на скоростите.

Тъй като $v_x = v_0 \cos \alpha = \text{const}$, ясно е, че ходографът ще бъде права линия, успоредна на оста $O'v_y$ на разстояние $OA_1 = v_0 \cos \alpha$ от нея. Върхът на скоростта ще описва ходографа отгоре на долу със скорост, равна на земното ускорение.



За да се намери радиуса на кривина на параболата в произволна нейна точка, е нужно да пресметнем a_n



За целта пишем

$$a_n = g \cos \gamma, \text{ където } \operatorname{tg} \gamma = y' \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Като вземем в предвид, че

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

За нормалното ускорение получаваме

$$a_n = \frac{g}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Радиуса на кривината пресмятаме от

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{g} \sqrt{1 + y'^2}$$

За върха точка А, в която $y' = 0$ и $v_a = v_0 \cos \alpha$, ще имаме

$$\rho_{\min} = \rho_A = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g},$$

Което е минималната стойност на ρ . При симетрична парабола максималната си стойност ρ достига в точките на изстрелването и на падането, за които $v_0 = 0$ и $y' = \operatorname{tg} \alpha$, поради което

$$\rho_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha}$$