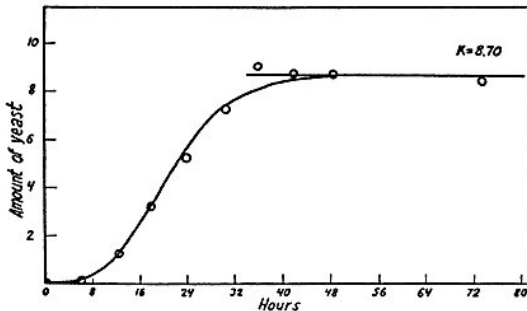


- ▶ равновесни точки
- ▶ критерии за устойчивост
- ▶ цикли с различен период
- ▶ приложения



растежът на популациите зависи от нелинейни взаимодействия
(гъстота, достъп до ресурси, функция на оцеляване)

функция на растеж

$$x_n = f(x_n, x_{n-1}, \dots),$$

където f е нелинейна.

в много малко случаи може да намерим решение за x_n в затворен вид, дори ако f зависи само от една предишна стойност на x

стремим се към качествено описание на свойствата на решенията на такъв тип модели.

- ▶ дискретно логистично уравнение, процес на Ферхюлст

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n(r - dx_n), \quad r, d > 0$$

- ▶ дискретно логистично уравнение, процес на Ферхюлст

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n(r - dx_n), \quad r, d > 0$$

- ▶ процес на Бевертън-Холт

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{kx_n}{1 + bx_n}, \quad k, b > 0$$

примери за нелинейни функции на растеж

- ▶ процес на Хасел

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{kx_n}{(1 + ax_n)^b}, \quad k, a, b > 0$$

примери за нелинейни функции на растеж

- ▶ процес на Хасел

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{kx_n}{(1 + ax_n)^b}, \quad k, a, b > 0$$

- ▶ процес на Рикер

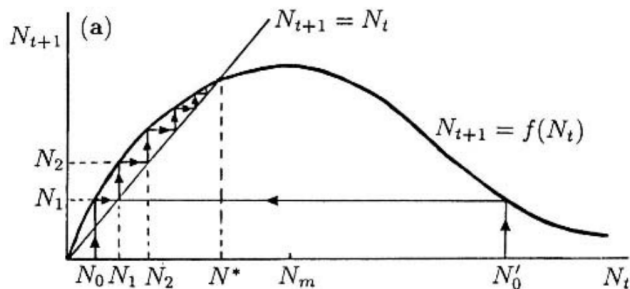
$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n \exp\left(r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)\right), \quad r, K > 0$$

функция на растеж

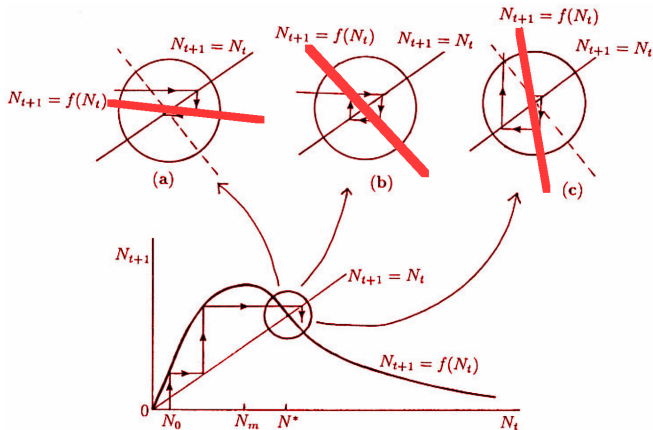
заради природата на механизма на саморегулация при растеж на една популация, разглежданата функция f е ограничена отгоре за всяко $x > 0$

ВАЖНО: биологично тълкуване на параметрите в тези модели!

метод на паяжината



устойчивость на равновесната точка



формално извеждане на критерий за устойчивост

поведение на уравнението

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

за стойност, близка до равновесната точка $\bar{x}$

$$x_n = \bar{x} + \delta x_n, \quad |\delta x_n| \approx 0$$

поведение на отклонението δx_n за $n \uparrow$

критерий за устойчивост

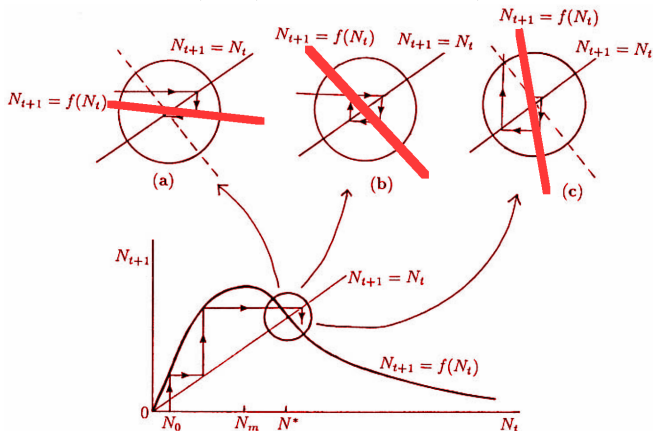
Ако $|f'(\bar{x})| < 1$, то равновесната точка $\bar{x}$ е локално устойчива.

Ако $|f'(\bar{x})| > 1$, то равновесната точка $\bar{x}$ е локално неустойчива.

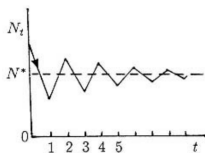
Ако $|f'(\bar{x})| = 1$, е необходим по-задълбочен анализ.

устойчивость на равновесната точка

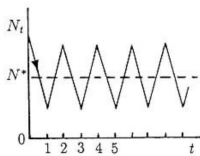
$$-1 < \lambda < 0 \quad \lambda = -1 \quad \lambda < -1$$



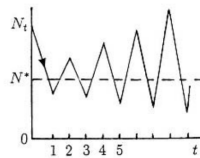
ВЪЗМОЖНИ СЦЕНАРИИ



(a)

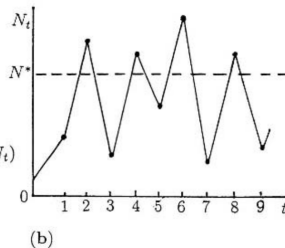
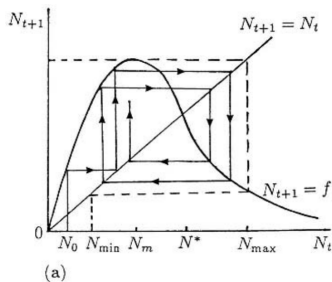


(b)



(c)

случаят $\lambda < -1$



- ▶ такава привидно случайна динамика създава сериозни проблеми от гледна точка на моделирането.
- ▶ дали получените стойности се генерират от детерминистичен модел или от чиста случайност?
- ▶ задачата на моделирането е да реши кое от двете е по-подходящо, но всъщност може да не сме в състояние да го определим в конкретна ситуация
- ▶ обаче можем да посочим колко чувствителна може да бъде динамиката на популацията към промени в параметрите

с такава графика на f максималната стойност $N_{\max}$ се достига за

$$N_m : f'(N_m) = 0,$$

а минимумът $N_{\min}$ е следващата итерация,

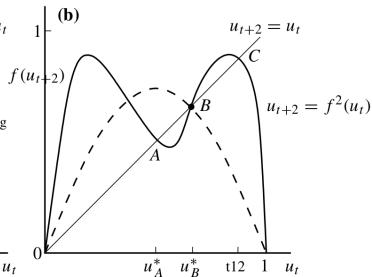
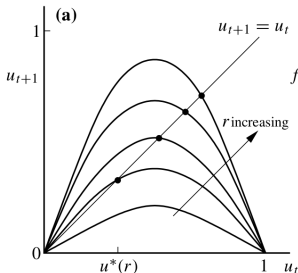
$$N_{\min} = f(N_{\max}) = f^{(2)}(N_m)$$

изчезване на популация

- ▶ ако кривата f се спуска стръмно за стойности $N_t > N_m$, възможността за рязък спад на популацията до ниски стойности, близки до $N_{\min}$, повдига въпроса за изчезване на популацията.
- ▶ ако популацията спадне до стойности $N_t < 1$, тя очевидно изчезва
- ▶ в повечето случаи изчезването е почти неизбежно, ако N_t спадне до ниски стойности
- ▶ тогава е необходим стохастичен модел!

логистично уравнение, поява на 2-цикли

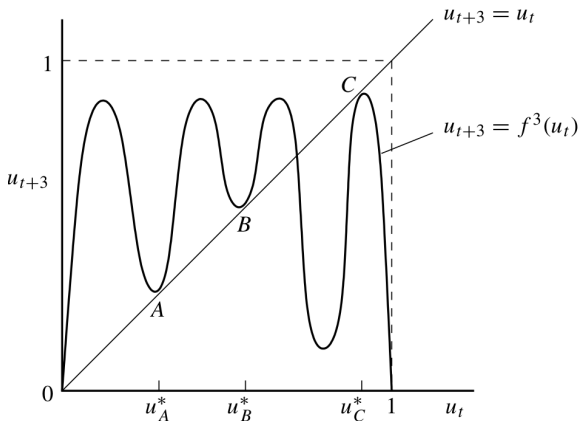
- ▶ $u_{n+1} = f(u_n) = ru_n(1 - u_n)$
- ▶ $u_{n+2} = f^{(2)}(u_n) = r(ru_n(1 - u_n))(1 - ru_n(1 - u_n))$



логистично уравнение, поява на 3-цикли

► $u_{n+1} = f(u_n) = ru_n(1 - u_n)$

► $u_{n+3} = f^{(3)}(u_n)$



бифуркационен анализ

