Решения на задачите от контролна работа 2

Пълни решения ще бъдат дадени само за задачите от първи вариант.
Където е удачно са посочени отговори за останалите варианти, а
решенията са аналогични на описаните по-долу.

Задача 1. Решавайки първото сравнение получаваме

$$x = 1 + 4y \tag{1}$$

Така полученият резултат заместваме във второто сравнение от системата

$$1+4y \equiv 3 \pmod 5 \Leftrightarrow 4y \equiv 2 \pmod 5 \Leftrightarrow 2y \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow y \equiv 3 \pmod 5$$

В горната верига от еквивалентни сравнения първо сме разделили двете страни на 2 и понеже $(2,5) = 1$ това не променя по никакъв начин модула. След това сме умножили двете страни по 3 с идеята да се възползваме от факта, че $6 \equiv 1 \pmod 5$. Оттук

$$y = 3 + 5z \tag{2}$$

и този резултат заместваме в (1).

$$x = 1 + 4(3 + 5z) = 13 + 20z. \tag{3}$$

Израза за x заместваме в последното уравнение от системата.

$$13 + 20z \equiv 2 \pmod 7 \Leftrightarrow 20z \equiv -4 \pmod 7 \Leftrightarrow -z \equiv -4 \pmod 7$$
$$\Leftrightarrow z \equiv 4 \pmod 7$$

което се получава след като се направи редукция по модул 7 в двете страни на сравнението.
Накрая

$$z = 4 + 7t, \tag{4}$$

което заместваме в (3).

$$x = 13 + 20(4 + 7t) \Leftrightarrow 93 + 140t.$$

Така $x \equiv 93 \pmod{140}$ е единственото решение на даденото сравнение по модул 140.

Решенията на останалите варианти са както следва:

- Вариант 2: $x \equiv 82 \pmod{105}$

- Вариант 3: $x \equiv 23 \pmod{30}$
- Вариант 4: $x \equiv 57 \pmod{132}$

Задача 2.
а) Нека $\overline{2k_1}, \overline{2k_2} \in S$ и $\overline{k} \in \mathbb{Z}_{10}$.

$$\overline{2k_1} - \overline{2k_2} = \overline{2(k_1 - k_2)} = \overline{2k}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{k}.\overline{2k_1} = \overline{2kk_1} = \overline{2k'}, k' \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Горните равенства получаваме след редукция по модул 10 (ако е необходима) и след като съобразим, че четно число може да бъде сравнимо само с друго четно число по модул 10. Така $S \trianglelefteq \mathbb{Z}_{10}$.
Нека да дефинираме изображението

$$\varphi : \mathbb{Z}_{10}/S \to \mathbb{Z}_2$$

посредством

$$\varphi(\bar{l}) = \bar{l} \in \mathbb{Z}_2,$$

което на остатъка на l при деление с 10 съпоставя този при деление с 2 (например $\varphi(\overline{6}) = \overline{0}$, а $\varphi(\overline{7}) = \overline{1}$).
Съвсем непосредствено се проверява, че така построеното изображение φ е добре дефинирано и е хомоморфизъм на пръстени с ядро $Ker(\varphi) = S$ и след приложение на теоремата за хомоморфизмите получаваме $\mathbb{Z}_{10}/S \cong \mathbb{Z}_2$.

Заб. За да решим подусловие а) можеше директно да се позовем на общия резултат, който описва всички идеали и фактор-пръстени на $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$.

б) Аналогично на а) дефинираме изображение

$$\psi : \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_5, \ \psi(\bar{l}) = \bar{l} \in \mathbb{Z}_5,$$

което на остатъка на l при деление с 10 съпоставя остатъка му при деление с 5. Това изображение задава добре определен хомоморфизъм на пръстени и ако

$$\xi = \psi|_S$$

можем да проверим, че ξ задава търсеният изоморфизъм.

Задача 3.
а)

$$I = (3 + 2\sqrt{3}) = \{z(3 + 2\sqrt{3}|z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]\} = \{(a + b\sqrt{3})(3 + 2\sqrt{3})|a, b \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{(3a + 6b) + (2a + 3b)\sqrt{3}|a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Сега, ако $\alpha + \beta\sqrt{3} \in I$, то $\alpha = 3a + 6b$, за някои две цели числа a и b. От това представяне непосредствено следва, че $\alpha = 3(a + 2b)$, т.е. $3|\alpha \Leftrightarrow \alpha \equiv 0 \pmod{3}$. Тъй като $\alpha + \beta\sqrt{3}$ беше произволно, то

$$I \subseteq J \tag{1}$$

Нека сега $\alpha + \beta\sqrt{3} \in J$. Тогава е изпълнено, че $\alpha \equiv 0 \pmod 3$. За да докажем, че $\alpha + \beta\sqrt{3} \in I$ трябва да намерим елемент $x + y\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, такъв че $\alpha + \beta\sqrt{3} = (x + y\sqrt{3})(3 + 2\sqrt{3}) = (3x + 6y) + (2x + 3y)\sqrt{3}$, т.е. да решим системата:

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 6y = \alpha \\ 2x + 3y = \beta \end{array} \right.$$

в цели числа.
С непосредствени пресмятания достигаме до $x = 2\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$, $y = \frac{4\alpha - 6\beta}{6} \in \mathbb{Z}$, като факта, че $y \in \mathbb{Z}$ следва от $\alpha \equiv 0 \pmod 3$.
Тъй като $\alpha + \beta\sqrt{3}$ беше произволно получаваме:

$$J \subseteq I \tag{2}$$

От (1) и (2) непосредствено следва, че $I = J$, което и трябваше да докажем.

б) Дефинираме изображение:

$$\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Z}_3$$

посредством

$$\varphi(a + b\sqrt{3}) = \overline{a} \in \mathbb{Z}_3,$$

т.е. редукцията на a по модул 3.
Нека $a_i + b_i\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $i = 1, 2$ са два елемента от пръстена $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

$$\varphi(a_1 + b_1\sqrt{3} + a_2 + b_2\sqrt{3}) = \varphi((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3}) = \overline{a_1 + a_2} = \overline{a_1} + \overline{a_2} = \varphi(a_1 + b_1\sqrt{3}) + \varphi(a_2 + b_2\sqrt{3})$$

$$\varphi((a_1+b_1\sqrt{3})(a_2+b_2\sqrt{3})) = \varphi((a_1a_2+3b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{3}) = \overline{a_1a_2 + 3b_1b_2} = \overline{a_1a_2} + \overline{3b_1b_2} = \overline{a_1a_2} = \varphi(a_1 + b_1\sqrt{3})\varphi(a_2 + b_2\sqrt{3}),$$

което показва, че φ е хомоморфизъм на пръстени.
Нека $a + b\sqrt{3} \in I$, т.е. $a \equiv 0 \pmod 3$. Тогава $\varphi(a + b\sqrt{3}) = \overline{a} = \overline{0}$ и тъй като $a + b\sqrt{3} \in I$ беше произволно, то

$$I \subseteq Ker(\varphi) \tag{3}$$

Обратно: ако $a + b\sqrt{3} \in Ker(\varphi)$, то $\overline{0} = \varphi(a + b\sqrt{3}) = \overline{a}$, т.е. $a \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow a + b\sqrt{3} \in I$. Тъй като елемента беше избран произволно следва, че

$$Ker(\varphi) \subseteq I \tag{4}$$

От (3) и (4), получаваме че $I = Ker(\varphi)$.
Сега можем да приложим теоремата за хомоморфизмите на пръстени и да получим

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/I \cong Im(\varphi).$$

Ако $\overline{k} \in \mathbb{Z}_3$, то $\varphi(k + 0\sqrt{3}) = \overline{k}$, така че $Im(\varphi) = \mathbb{Z}_3$.
Окончателно

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/I \cong \mathbb{Z}_3$$

Задача 4.
а)

$$\nu(1) = \nu(1.1) = \nu(1) + \nu(1) \Leftrightarrow \nu(1) = 0$$

$$0 = \nu(1) = \nu((-1)(-1)) = \nu(-1) + \nu(-1) \Leftrightarrow 2\nu(-1) = 0 \Leftrightarrow \nu(-1) = 0$$

Последното равенство е изпълнено, защото в пръстена $\mathbb{Z}$ няма делители на нулата.
Нека сега $x, y \in R$. Ясно е, че $x + 0 = 0 + x = x \in R$ и $0.x = x.0 = 0 \in R$ и следователно можем да считаме, че x и y са избрани от $R \setminus \{0\}$. Няма да разглеждаме и случаят, в който $x + y = 0$, понеже 0 очевидно принадлежи на R. За x, y тях знаем, че

$$\nu(x) \geq 0 \tag{1}$$
$$\nu(y) \geq 0 \tag{2}$$

$$\nu(x + y) \geq min(\nu(x), \nu(y)) \geq 0,$$

понеже са в сила (1) и (2). Това показва, че $x + y \in R$.

$$\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y) \geq 0$$

отново, защото имаме (1) и (2). Така xy също е в R.
Всичко показано до момента ни дава, че R е подпръстен на $\mathbb{F}$.

б) Нека $\mathbb{F}^* \ni x \notin R$, т.е. $\nu(x) < 0$.

$$0 = \nu(1) = \nu(x.x^{-1}) = \nu(x) + \nu(x^{-1}) \Leftrightarrow \nu(x^{-1}) = -\nu(x) > 0,$$

което показва, че $x^{-1} \in R$.

в) Нека $x \in R$ е обратим в R. Тогава $x^{-1} \in R$.

$$0 = \nu(1) = \nu(x.x^{-1}) = \nu(x) + \nu(x^{-1}) \Leftrightarrow \nu(x) = -\nu(x^{-1}),$$

но понеже както x, така и обратният му принадлежат на R горното равенство е възможно единствено, когато $\nu(x) = \nu(x^{-1}) = 0$.
Обратно, ако $\nu(x) = 0$, то повтаряйки горните разсъждения ще достигнем до $\nu(x^{-1}) = 0$, което е достатъчно за да можем да твърдим, че $x^{-1} \in R$, т.е. x е обратим в R.