Решения на задачите от Контролна работа N1

Задача 1. Ще разгледаме малко по-общо множеството на целите числа $\mathbb{Z}$ с операция

$$\star : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

дефинирана посредством

$$a \star b = a + b + k,$$

където $k \in \mathbb{Z}$ е фиксирано цяло число.
а) Ясно е, че сумата на три цели числа отново е цяло число и следователно $a \star b \in \mathbb{Z}$, т.е. множеството е затворено относно въведената операция.
$a\star(b\star c) = a\star(b+c+k) = a+b+c+k+k = (a+b+k)+c+k = (a+b+k)\star c = (a \star b) \star c$, т.е. операцията е асоциативна.
Нека $e \in \mathbb{Z}$ е елемент удовлетворяващ условията $a \star e = e \star a = a$ за всеки елемент $a \in \mathbb{Z}$. Първото равенство ни дава $a+e+k = a \iff e+k = 0 \iff e = -k$. Непосредствено се проверява, че така намереното e удовлетворява и второто равенство, т.е. $e = -k$ е неутрален елемент за $(\mathbb{Z}, \star)$.
Нека $a \in \mathbb{Z}$. Търсим елемент a', такъв че $a \star a' = a' \star a = e$. От първото равенство получаваме $a + a' + k = -k \iff a' = -2k - a$, т.е. всеки елемент от множеството притежава обратен (може лесно да се провери, че и второто равенство е изпълнено) и $a^{-1} = -2k - a$.
Накрая $a \star b = a + b + k = b + a + k = b \star a$ и групата е абелева.
б) Може да се провери, че $(\mathbb{Z}, \star) = \langle 1 - k \rangle$. Освен това е очевидно, че групата $(\mathbb{Z}, \star)$ е безкрайна и от добре известен резултат тази група е изоморфна на адитивната група на целите числа.
Заб. 1 Изоморфизма от б) може да бъде построен и експлицитно, а именно

$$\varphi : (\mathbb{Z}, \star) \to (\mathbb{Z}, +)$$

дефинираме посредством

$$\varphi(a) = a + k$$

.
Заб. 2 Резултата от а) може да бъде доказан и като първо докажем б). Тогава той е очевиден, понеже $(\mathbb{Z}, +)$ е абелева група.
Заб. 3 Задачите от контролната работа се получават, когато за k заместим едно от числата $-2, -1, 1, 2$.

Задача 2.
а) Всички подгрупи на $\mathbb{C}_{196}$ са: $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_4, \mathbb{C}_7, \mathbb{C}_{14}, \mathbb{C}_{28}, \mathbb{C}_{49}, \mathbb{C}_{98}, \mathbb{C}_{196}$, а тези на $\mathbb{C}_{225} : \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_3, \mathbb{C}_5, \mathbb{C}_9, \mathbb{C}_{15}, \mathbb{C}_{25}, \mathbb{C}_{45}, \mathbb{C}_{75}, \mathbb{C}_{225}$.

б) Ако $G = \langle g \rangle$ е циклична група от ред 15 с пораждащ g, то реда на групата $\langle g^{10} \rangle$ (който е равен на реда на елемента g^{10}) е $\frac{15}{g.c.d.(10,15)} = \frac{15}{5} = 3$. Реда на групата $G/\langle h \rangle$ е $\frac{|G|}{|\langle h \rangle|} = \frac{15}{|\langle h \rangle|}$. Тъй като реда на факторгрупата трябва да бъде 3, то забелязваме, че h трябва да бъде елемент от ред 5. Такива елементи в G са g^3, g^6, g^9, g^12.
В случая на група G от ред 14 и подгрупа породена от $g^8 \Rightarrow h = g^7$.

Задача 3. Ще решим само задачата от първи вариант. Останалите се решават аналогично.
а) Ако $A \in G$, то $det(A) = a \neq 0 \Rightarrow A \in GL_3(\mathbb{Q})$. Така е достатъчно да докажем само, че $G \leq GL_3(\mathbb{Q})$. Нека

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

са елементи от множеството G.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2 d_2 - a_2 c_2}{a_2} \\ 0 & \frac{1}{a_2} & -\frac{d_2}{a_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2 d_2 - a_2 c_2}{a_2} \\ 0 & \frac{1}{a_2} & -\frac{d_2}{a_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \frac{a_1}{a_2} & \star \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

където със $\star$ са означени елементи, които със сигурност ще бъдат рационални числа (понеже се получават от други рационални числа само с основните аритметични операции). Тук важното е да се отбележи, че $\frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow AB^{-1} \in G$, т.е. G е група относно операцията умножение на матрици.
б) Дефинираме изображението

$$\varphi : G \to \mathbb{Q}^*$$

посредством

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) := a$$

$$\varphi(AB) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & a_1 a_2 & \star \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= a_1 a_2 = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Това доказва, че φ е хомоморфизъм на групи. Непосредствено проверяваме, че $Ker\varphi = H$ и сега прилагайки теоремата за хомоморфизмите веднага получаваме, че:

- $H \lhd G$
- $G/H \cong Im\varphi$

Това, че $Im\varphi = \mathbb{Q}^*$ се проверява непосредствено.

Задача 4.

а) Нека $a_1b_1, a_2b_2 \in AB$. $(a_1b_1)^{-1}a_2b_2 = b_1^{-1}a_1^{-1}a_2b_2$. Понеже, $b_1^{-1}a_1^{-1} \in BA = AB$, то $b_1^{-1}a_1^{-1} = a'b'$ и тогава $(a_1b_1)^{-1}a_2b_2 = a'b'a_2b_2$. Отново използваме, че $b'a_2 \in BA = AB$ и тогава $b'a_2 = a''b''$. Така $(a_1b_1)^{-1}a_2b_2 = a'a''b''b_2 \in AB$, т.е. $AB \leq G$.

б) В случая, когато $G = S_3$ можем да вземем $A = \langle(12)\rangle, B = \langle(13)\rangle$, а когато $G = D_3$ може да разгледаме следния пример $A = \langle rs\rangle$ и $B = \langle r^2s\rangle$.