Пета глава

АБСТРАКТНО ИНТЕГРИРАНЕ

Интегрирането е основен инструмент на анализа, но въпреки дългата му история пълноценната теория на интеграла бе създадена късно. Една от особеностите ѝ е широтата на действието. Тя повлия върху много области. Ще отбележим само редовете и трансформацията на Фурие, диференциалните и интегралните уравнения, теорията на вероятностите и значителното стимулиращо въздействие върху появата и развитието на функционалния анализ. Има множество примери за съвкупности от функции Φ в дадено множество X, които могат да се интегрират, т. е. във Φ е зададен подходящ линеен функционал $\int$. Той превръща Φ в нормирано пространство, което обикновено не е пълно. Тези предварителни данни са характерни за пространствата на Даниел. Особено интересни са пълните пространства на Даниел, наречени лебегови. Последните играят двояка роля: осигуряват важни за анализа и физиката пространства и интегрирането в тях е гъвкаво поради удобните теореми за граничен преход в интеграла — онези на Бепо Леви, Лебег и Фату. Гъвкавостта се дължи и на системното използуване на онези подмножества на X, които не са съществени при интегрирането — пренебрежимите множества. В следващата глава ще се убедим, че всяко пространство на Даниел се потопява естествено в лебегово.

В § 1 е приведена дефиницията на пространство на Даниел, а § 2 съдържа примери за такива пространства. В § 3, 4 и 5 се изучават пренебрежимите множества. В § 6 е разгледан един въпрос за граничен преход под интеграла. В § 7 се запознаваме с два вида сходимост. Централното за тази глава понятие — пространство на Лебег — е въведено в § 8, където е доказана и теоремата на Бепо Леви. Параграфи 9 и 10 са посветени на теоремите на Лебег и Фату. Параграф 11 борави с едно обобщение.

При първо четене може да се пропуснат частта от § 7 след доказателството на предложение 7.1 и § 11.

§ 5. 1. ПРОСТРАНСТВА НА ДАНИЁЛ

В общата теория на интеграла се разглеждат произволно множество $X \neq \emptyset$ и линейно пространство Φ от реални функции $\varphi : X \to \mathbf{R}$ и се предполага валидността на следните четири аксиоми:

а) за всяко $\varphi \in \Phi$ е в сила $|\varphi| \in \Phi$;

б) за всяко $\varphi \in \Phi$ е в сила $\inf(1, \varphi) \in \Phi$;

в) зададен е *позитивен* линеен функционал $\int : \Phi \to \mathbf{R}$, т. е. линеен функционал, за който от $\varphi \in \Phi$ и $\varphi(x) \geq 0$ за всяко $x \in X$ следва $\int \varphi \geq 0$;

г) за всяка редица

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \ldots \geq \varphi_n(x) \geq \ldots$$

от елементи на Φ, която намалява за всяко $x \in X$ и за която

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$$

за всяко $x \in X$, е в сила

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = 0.$$

Една тройка $\langle X, \Phi, \int \rangle$ от множество X, линейно пространство Φ от реални функции в X и линеен функционал $\int : \Phi \to \mathbf{R}$, за които са изпълнени аксиомите а) — г), ще наричаме *пространство на Даниел*.

Аксиомите а) и б) изразяват свойства на самото пространство от функции Φ. Трябва да си мислим Φ като съвкупност от функции, които вече умеем да интегрираме. Тогава аксиомата а) изразява, че заедно с всяка интегрируема функция нейният модул също е интегрируема функция. От нея следва, че ако $\varphi, \psi \in \Phi$, то функциите $\inf(\varphi, \psi)$ и $\sup(\varphi, \psi)$, дефинирани съответно с

$$(\inf(\varphi, \psi))(x) = \min(\varphi(x), \psi(x)),$$

$$(\sup(\varphi, \psi))(x) = \max(\varphi(x), \psi(x))$$

за всяко $x \in X$, също принадлежат на Φ. Наистина читателят ще съобрази веднага, че са изпълнени равенствата

$$\inf(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}(\varphi + \psi - |\varphi - \psi|),$$

$$\sup(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}(\varphi + \psi + |\varphi - \psi|),$$

и твърдението следва от аксиома а) и от линейността на Φ. По-специално за всяко $\varphi \in \Phi$ функциите

$$\varphi^+ = \sup(0, \varphi) = \frac{1}{2}(\varphi + |\varphi|),$$

$$\varphi^- = -\inf(0, \varphi) = -\frac{1}{2}(\varphi - |\varphi|)$$

са от Φ. Същевременно $\varphi^+ \geq 0$, $\varphi^- \geq 0$ и $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, поради което *всяка функция от Φ е разлика на две неотрицателни функции от Φ.*

Аксиомата б) се нарича аксиома на Стоун. Тя е едно техническо изискване за Φ и има за цел да отстрани от разглеждане някои изродени ситуации. Тя се намесва съществено при изучаването на измеримите функции, функционалните пространства, а също и при разглеждането на взаимоотношението между интеграл и мярка, за които ще стане дума в следващите глави. В тази глава няма да прибягваме до услугите на аксиомата на Стоун.

Линейният функционал $\int$ във Φ се нарича *интеграл*. Позитивността на интеграла означава, че интегралът на всяка неотрицателна функция от Φ е неотрицателен. Оттук следва, че за всеки две функции φ, $\psi \in \Phi$, за които $\varphi \leq \psi$ ($\varphi(x) \leq \psi(x)$ за всяко $x \in X$), е в сила $\int \varphi \leq \int \psi$. Наистина тогава $\psi - \varphi \geq 0$ и следователно $\int \psi - \int \varphi = \int (\psi - \varphi) \geq 0$.

Също толкова просто се доказва и неравенството

$$\left|\int \varphi\right| \leq \int |\varphi| \tag{1}$$

за всяко $\varphi \in \Phi$. Наистина от неравенствата

$$\varphi \leq |\varphi| \text{ и } -\varphi \leq |\varphi|$$

следва очевидно

$$\int \varphi \leq \int |\varphi| \text{ и } -\int \varphi \leq \int |\varphi|,$$

откъдето (1) се получава незабавно.

Аксиома г) е хипотеза за граничен преход под интеграла. Тя е твърде съществена за следващото изложение.

Да отбележим още, че ако за произволно $\varphi \in \Phi$ положим

$$\|\varphi\| = \int |\varphi|,$$

получаваме една полунорма във Φ. С известна неточност тя се нарича *първа норма* във Φ. *Интегралът* $\int : \Phi \to \mathbf{R}$ *е непрекъснат линеен функционал спрямо първата норма*. Наистина

$$\left|\int \varphi\right| \leq \int |\varphi| = \|\varphi\|$$

за всяко $\varphi \in \Phi$. *Когато* $\int$ *не е тъждествено нула, неговата норма очевидно е* 1.

§ 5.2. ПРИМЕРИ ЗА ПРОСТРАНСТВА НА ДАНИЕЛ

Ще започнем с два съвършено прости примера.

5.2.1. Пример. Нека X е непразно множество, а Φ — линейното пространство на всички функции $\varphi : X \to \mathbf{R}$, всяка от които е тъждествено нула вън от някакво (зависещо от φ) крайно множество в X. Аксиомите а) и б) от предишния параграф са очевидно изпълнени. За произволно $\varphi \in \Phi$ ще положим

$$\int \varphi = \sum_{x \in X} \varphi(x).$$

Тук сумата вдясно трябва да се разбира като сбор от всички стойности на φ в някакво крайно подмножество на X, вън от което φ се анулира тъждествено. Разбира се, въпросната сума не зависи от специалния избор на това крайно множество. Аксиомите в) и г) за така въведения интеграл във Φ се проверяват непосредствено.

5.2.2. Пример. Нека X е безкрайно множество и Φ е съвкупността на всички функции $\varphi: X \to \mathbb{R}$, всяка от които е тъждествено нула вън от някакво (зависещо от φ) изброимо множество в X и безкрайният ред

$$\sum_{x \in X} |\varphi(x)|$$

е сходящ. Ако за произволно $\varphi \in \Phi$ положим

$$\int \varphi = \sum_{x \in X} \varphi(x),$$

отново получаваме пространство на Даниел. Разбира се, ако X е изброимо, смисълът на дясната страна е ясен поради предположената абсолютна сходимост. Ако X не е изброимо, избираме произволно изброимо подмножество на X, вън от което φ се анулира тъждествено, и сумираме само в него. Независимостта на определението от това изброимо множество е очевидна. Препоръчваме на читателя да провери аксиома г).

Най-интересните примери за пространства на Даниел се базират на следващата теорема, която гарантира аксиома г) в широк кръг случаи.

5.2.3. Теорема (Д и н и). *Нека X е компактно множество в някакво нормирано пространство и*

$$(1) \qquad \varphi_1 \geqq \varphi_2 \geqq \ldots \geqq \varphi_n \geqq \ldots$$

намаляваща редица от непрекъснати функции в X с

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = 0$$

за всяко $x \in X$. Тогава сходимостта на (1) *е равномерна.*

Д о к а з а т е л с т в о. Нека ε е произволно положително число. Трябва да се убедим в съществуването на такова n, че при $m \geqq n$ да е в сила $\varphi_m(x) < \varepsilon$ за всяко $x \in X$. Да допуснем противното. Тогава за всяко $n=1, 2, \ldots$ ще съществуват $m_n \geqq n$ и точка $x_n \in X$, за които $\varphi_{m_n}(x_n) \geqq \varepsilon$. Тъй като редицата (1) е намаляваща, то

$$\varphi_n(x_n) \geqq \varphi_{m_n}(x_n) \geqq \varepsilon.$$

По този начин получихме редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от елементи на X, за която

$$(3) \qquad \varphi_n(x_n) \geqq \varepsilon$$

за всяко $n=1, 2, \ldots$

От компактността на X следва, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ притежава сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ с граница ξ от X. Нека l е произволно цяло положително число. Тогава за всички достатъчно големи k ще бъде в сила $n_k \geqq l$ и понеже редицата (1) е намаляваща, то

$$\varphi_l(x_{n_k}) \geqq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqq \varepsilon$$

съгласно (3). Следователно $\varphi_l\ (x_{n_k}) \geqq \varepsilon$ за всички достатъчно големи k. Но редицата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ клони към ξ, а φ_l е непрекъсната функция. Ето защо $\varphi_l(\xi) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_l(x_{n_k})$ и поради това $\varphi_l(\xi) \geqq \varepsilon$. Последното неравенство е доказано за всяко $l = 1, 2, \ldots$, а това противоречи на (2). С това теоремата е доказана.

Следващата теорема осигурява наличието на аксиомата за граничен преход под интеграла в широк кръг от случаи.

5.2.4. Теорема. *Нека X е компактно множество, $C(X)$ е съвкупността на всички непрекъснати функции $\varphi: X \to \mathbf{R}$ и $\int : C(X) \to \mathbf{R}$ е произволен позитивен функционал. Тогава тройката $\langle X, C(X), \int \rangle$ е пространство на Даниел.*

Доказателство. Единственото, което трябва да установим, е аксиомата г) от определението на пространство на Даниел. Нека (1) е намаляваща редица от функции от $C(X)$ с (2) за всяко $x \in X$.

Нека ε е произволно положително число. Съгласно лемата на Дини съществува такова ν, че при $n > \nu$ да е в сила

$$0 \leqq \varphi_n(x) < \varepsilon \qquad (x \in X).$$

От позитивността на интеграла сега следва

$$0 \leqq \int \varphi_n \leqq \int \varepsilon = \varepsilon \int 1,$$

с което всичко е доказано, тъй като числото вдясно е произволно малко заедно с ε.

5.2.5. Пример. Ако в $C([a, b])$ разгледаме римановия интеграл

$$\int f = \int_a^b f(x)dx,$$

получаваме съгласно теорема 4 пространство на Даниел.

По-общо нека $\alpha: [a, b] \to \mathbf{R}$ е произволна растяща функция. Ако фиксираме α, стилтесовият интеграл

$$\int f = \int_a^b f(x)d\,\alpha(x)$$

очевидно е позитивен линеен функционал в $C\ ([a, b])$. Следователно всяка растяща функция α дава по един пример за пространство на Даниел.

5.2.6. Пример. Нека $\bar{\Delta}$ е затворен паралелепипед в $\mathbf{R}^n$. Ако в $C(\bar{\Delta})$ разгледаме римановия интеграл

$$\int f = \int\int_{\overline{\Delta}} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

получаваме пространство на Даниел.

По-общо нека Δ е съответният полузатворен паралелепипед, $\mathbf{S}$ е съвкупността на всички полузатворени подпаралелепипеди на Δ и $\mu : \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ е произволна неотрицателна адитивна функция. Ако фиксираме μ, интегралът

$$\int f = \int_{\overline{\Delta}} f(x) d\,\mu(x)$$

е позитивен линеен функционал в $C(\overline{\Delta})$ (вж. § 2.12). Следователно отново получаваме пространство на Даниел.

Теорема 4 не изчерпва възможностите на теоремата на Дини. Нека L е нормирано пространство и X е множество в L. Една непрекъсната функция $f : X \to \mathbf{R}$ да наречем *финитна,* когато съществува компактно множество $Y \subset X$, за което f се анулира тъждествено в множеството $X \setminus Y$. Така например при $X = \mathbf{R}$ финитните функции $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ са онези непрекъснати функции, всяка от които се анулира тъждествено вън от подходящ интервал. Аналогично при $X = \mathbf{R}^n$ финитните функции $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ са непрекъснатите функции, които се анулират тъждествено вън от подходящи паралелепипеди. Ако $\varphi : X \to \mathbf{R}$ е финитна функция, всяко компактно множество Y в X, вън от което φ се анулира, се нарича *носител* на φ.

Следващата теорема обобщава теорема 4.

5.2.7. Теорема. *Нека X е множество в някакво нормирано пространство и $\Phi(X)$ е съвкупността на всички финитни функции $\varphi : X \to \mathbf{R}$. Тогава за произволен позитивен линеен функционал $\int : \Phi(X) \to \mathbf{R}$ тройката $\langle X, \Phi(X), \int \rangle$ е пространство на Даниел.*

Доказателство. Предоставяме на читателя да обмисли несъществените модификации на доказателството на теорема 4, след които се получава теорема 7.

5.2.8. Пример. Нека Φ е съвкупността на финитните функции $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ако за произволно $\varphi \in \Phi$ положим

$$\int \varphi = \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

където $[a, b]$ е носител на φ, получаваме очевидно коректно определен (независещ от специалния избор на носителя $[a, b]$) позитивен линеен функционал във Φ. Следователно $\langle \mathbf{R}, \Phi, \int \rangle$ е пространство на Даниел. Разгледаният функционал $\int$ се нарича *инвариантен интеграл* в $\mathbf{R}$. Така посоченият пример е във всяко отношение основен в теорията на интеграла. Ето защо читателят постоянно трябва да го има пред вид.

По-общо, ако $\alpha:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е произволна растяща функция и за произволно $\varphi\in\Phi$ положим

$$\int\varphi=\int_a^b\varphi(x)\,d\alpha(x),$$

където $[a, b]$ отново е носител на φ, пак получаваме пространство на Даниел.

5.2.9. Пример. Ако Φ е съвкупността на финитните функции $\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ и за произволно $\varphi\in\Phi$ разгледаме римановия интеграл

$$\int\varphi=\int\int\underset{\overline{\Delta}}{\dots}\int\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n,$$

където $\overline{\Delta}$ е произволен носител на φ, получаваме отново пространство на Даниел. Функционалът $\int$ се нарича *инвариантен интеграл* в $\mathbf{R}^n$. И тук във Φ могат да се разглеждат много други интеграли, но инвариантният интеграл безспорно е най-интересният.

Ето и други интеграли във Φ. Нека $\mathbf{S}$ е съвкупността на всички полузатворени паралелепипеди в $\mathbf{R}^n$ и $\mu:\mathbf{S}\to\mathbf{R}$ е произволна неотрицателна адитивна функция (вж. § 2.3). Тогава функционалът

$$\int\varphi=\int_{\overline{\Delta}}\varphi(x)\,d\mu(x),$$

където $\overline{\Delta}$ е носител на φ (вж. § 2.12), превръща Φ в пространство на Даниел.

Така виждаме, че пространствата на Даниел се срещат често в анализа. Съществуват и други интересни примери на такива пространства.