ЗМНС 14.05.15

Зад. Покажете че при движението на непрекъснатата среда с поле от скорости $v_i = \frac{x_i}{a+t}$, $i = 1, 2, 3$, $a = const$, масата $\rho_0 X_1 X_2 X_3$ в обема $X_1 X_2 X_3$ се запазва, т.е. $\rho_0 X_1 X_2 X_3 = \rho x_1 x_2 x_3$

Реш. Ще използваме ЗЗМ

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0$$

, заместваме в този закон дадените компоненти на скоростта $\Rightarrow$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) = 0$$

, но и от усл.

$$v_i = \frac{x_i}{a+t} \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{a+t}$$

т.е. $\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{3}{a+t} = 0$ ОДУ

Оттук $\int \frac{d\rho}{\rho} = -\int \frac{3}{a+t}\,dt \Rightarrow \ln\left|\frac{\rho}{c_1}\right| = -3\ln|a+t|$

Антилогаритмуваме $\Rightarrow$

$$\rho = c_1 \frac{1}{(a+t)^3}$$

В момента $t = t_0$ знаем че $\rho = \rho_0$

$$\rho(0) = c_1 \frac{1}{(a+0)^3} = \rho_0 \Rightarrow c_1 = \rho_0 a^3$$

т.е.

$$\rho = \frac{\rho_0 a^3}{(a+t)^3}$$

Вече намерихме ρ, остава да намерим x_1, x_2, x_3 да докажем $\rho_0 X_1 X_2 X_3 = \rho x_1 x_2 x_3$

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{x_i}{a+t}$$

– ОДУ

$$\int \frac{dx_i}{x_i} = \int \frac{dt}{a+t} \Rightarrow \ln\left|\frac{x_i}{C_2}\right| = \ln|a+t|$$

Аналог $\Rightarrow$ $x_i = C_2(a+t)$, $X_i = x_i(0) = C_2(a+0) \Rightarrow$

$$C_2 = \frac{X_i}{a} \Rightarrow x_i = \frac{X_i}{a}(a+t)$$

Заместване в дясната страна, т.е.

$$\rho = C_1 \frac{1}{(a+t)^3}$$

$$\rho_{x_1x_2x_3} = \frac{\rho_0 a^3}{(a+t)^3} \cdot \frac{X_1}{a}(a+t) \cdot \frac{X_2}{a}(a+t) \cdot \frac{X_3}{a}(a+t) \Rightarrow$$

$$\rho_{x_1x_2x_3} = \rho_0 X_1 X_2 X_3$$

Зад. Тензора на деформациите на непрекъснатата среда е

$$D = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Намерете главните деформации и трите инварианта на този тензор

Реш. $\det(D - \lambda E) =$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ a & 1-\lambda & 0 \\ b & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[-b^2 + (1-\lambda)^2 - a^2\right] \Rightarrow \lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{a^2+b^2}$$

I инвариант = trace $D = 1+1+1 = 3$

II инвариант $= a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - (a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{13}^2) =$
$= 3 - a^2 - b^2$

III инвариант = $\det D = 1 - a^2 - b^2$

Зад. Намерете повърхнината на тензора на напреженията за напрегнатото състояние, зададено с тензора

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$ ако

a, b и c имат еднакви знаци

Реш.

Уравнението на повърхнината на напрежението има вида

$$(\psi_1\ \psi_2\ \psi_3)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = a\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_3^2 = \pm k$$

Понеже знаем ~~..~~ тензора е квадрат

това е елипсоид

$$\frac{\psi_1^2}{bc} + \frac{\psi_2^2}{ac} + \frac{\psi_3^2}{ba} = \pm\frac{k^2}{abc}$$

Зад. Тензорът на малки деформации на непрекъснатата среда е

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(x_2+x_3) & x_3^2+1 \\ 0 & x_2^2+1 & -\sin(x_2+x_3) \end{pmatrix}$$

а) покажете, че деформациите, зададени с ε са съвместими

б) Намерете преместването $\vec{u}(x_1\ x_2\ x_3)$, използвайки линеаризирани уравнения

Реш. а) използвайки условията (Сен-Венан)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \Rightarrow 0+0=0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \Rightarrow$$

$$-\sin(x_2+x_3) + \sin(x_2+x_3) = 2$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} \Rightarrow 0+0=0+0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

б) $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 1$ $\qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$\varepsilon_{22} \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sin(x_2+x_3)$

$\varepsilon_{33} \Rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\sin(x_2+x_3)$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 2(x_3^2+1)$$

Решаване системата от шест частни диференциални уравнения

1-во у-е $\int \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 = \int 1\, dx_1 \Rightarrow u_1 = x_1 + C_1(x_2, x_3)$

2-ро у-е $\int \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 = \int \sin(x_2+x_3)\, dx_2 \Rightarrow$
$u_2 = -\cos(x_2+x_3) + C_2(x_1, x_3)$

3-то у-е $\int \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = \int -\sin(x_2+x_3)\, dx_3 \Rightarrow$
$u_3 = \cos(x_2+x_3) + C_3(x_1, x_2)$

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial x_2} + \frac{\partial C_2}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial C_1}{\partial x_3} + \frac{\partial C_3}{\partial x_1} = 0 \\ \cancel{\sin(x_2+x_3)} + \frac{\partial C_2}{\partial x_3} - \cancel{\sin(x_2+x_3)} + \frac{\partial C_3}{\partial x_2} = 2(x_3^2+1) \end{cases}$$

$$\int \frac{\partial C_1(x_2,x_3)}{\partial x_2} dx_1 = -\int \frac{\partial C_2(x_1,x_3)}{\partial x_1} dx_1 \Rightarrow$$

$$C_1(x_2,x_3) = C_2(x_1,x_3) + k_1(x_3) \xrightarrow{2\text{ро}}$$
$$\Rightarrow C_1(x_2,x_3) = -C_3(x_1,x_2) + k_2(x_2) \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial C_2}{\partial x_3} + k_1'(x_3) + \frac{\partial C_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\int \frac{\partial C_3}{\partial x_1} dx_1 = \int \left(\frac{\partial C_2}{\partial x_3} - k_1'(x_3)\right) dx_3 \Rightarrow$$

$$C_3 = C_2 - k_1 + k_3(x_2) \xrightarrow{3\text{то}}$$

$$\frac{\partial C_2(x_1,x_3)}{\partial x_3} + k_3'(x_2) = 2(x_3^2+1)$$

5

$$\int k_3'(x_2)\,dx_2 = 2\int (x_3^2+1)\,dx_3 \Rightarrow C_2(x_1,x_3) + k_4(x_1)$$

$$k_3(x_2) = \frac{2x_3^2}{3} + 2x_3 - C_2(x_1,x_3) + k_4(x_1) = 0$$

от 1-во у-е

$$\frac{\partial C_1(x_2,x_3)}{\partial x_2} = -\frac{\partial C_2(x_1,x_3)}{\partial x_1} = 0 \quad \text{(само ако } C_1 \text{ и } C_2 \text{ сасом.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_1(x_2,x_3)}{\partial x_2} = -\frac{\partial C_2(x_1,x_3)}{\partial x_1} = k_1(x_3) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial C_1(x_2,x_3)}{\partial x_2} = k_1(x_3) \quad \text{т.е. } C_1(x_2,x_3) = k_1(x_3)x_2 + k_2(x_3)$$

$$\frac{\partial C_2(x_1,x_3)}{\partial x_1} = k_1(x_3) \quad \text{т.е. } C_2(x_1,x_3) = k_1(x_3)x_1 + k_3(x_3)$$

от 2рото у-е

$$\frac{\partial C_1(x_2,x_3)}{\partial x_3} = -\frac{\partial C_3(x_1,x_2)}{\partial x_1} = k_4(x_2) \nearrow \frac{\partial C_1}{\partial x_3} = k_4(x_2) \Rightarrow C_1 = k_4(x_2)x_3 + k_5(x_2)$$

$$\searrow \frac{\partial C_3}{\partial x_1} = -k_4(x_2) \Rightarrow C_3 = -k_4(x_2)x_1 + k_6(x_2)$$

отиваме в 3-тото у-е

$$k_1(x_3)x_2 + k_2(x_3) = k_4(x_2)x_3 + k_5(x_2) - k_1'(x_3)x_1 - k_4'(x_2)x_1 +$$
$$+ k_6'(x_2) = 2(x_3^2+1) - k_1'(x_3) - k_4'(x_2) = 0$$

$$k_1'(x_3) = k_4'(x_2) = N = const \quad \text{т.е.}$$

$$k_1'(x_3) = N \Rightarrow k_1(x_3) = Nx_3 + N_1$$

$$k_6'(x_2) = 2(x_3^2+1) = M$$

$$\Rightarrow ?$$

Задача. Разглеждане движението на непрекъсната среда зададено с изображението

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2 \frac{(1+\sin^2 t)}{2}, \quad x_3 = X_3$$

Намерете плътността, като функция на координатите и времето

Упътване

а) напишете ЗЗМ. Разпишете дивергенцията на скоростта, като сума от трите частни производни

б) изчислете производните ∂v_i и ∂x_i и ги заместете в ЗЗМ

Реш.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)$$

$$v_1 = v_3 = 0, \quad v_2 = \frac{X_2}{2}\, 2 \sin t \cos t$$

$$X_2 = \frac{2x_2}{1+\sin^2 t} \Rightarrow v_2 = \frac{2x_2}{1+\sin^2 t}\sin t\cos t$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\left(\frac{2}{1+\sin^2 t}\cos t\sin t\right) \quad \text{ОДУ} \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{\rho}{c}\right| = -2\int \frac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{\rho}{c}\right| = \ln(1+\sin^2 t)^{-1} \Rightarrow \rho = \rho_0(1+\sin^2 t)^{-1}$$