УМНС 11.06.15

Зад Разгл движението на непрекъснато среда, зададено с изображението $x_1 = \frac{X_1}{1+tX_1}$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$. Намерете плътността ρ като функция на $\vec{x}$ и t

Реш Използваме ЗЗМ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$, където $\vec{\nabla}$ - дивергенцията

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)(\rho v_1, \rho v_2, \rho v_3) = 0$$ знаем също

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$ - дивергенцията на $\vec{v}$, т.е

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla}\rho)\vec{v} + \rho(\vec{\nabla}\vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)$$

$$v_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{X_1}{1+tX_1}\right) = \frac{-X_1(X_1)}{(1+tX_1)^2} = \frac{-X_1^2}{(1+tX_1)^2} = -x_1^2$$

$v_2 = 0$, $v_3 = 0$ $\Rightarrow$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) = -\rho(-2x_1) = 2\rho x_1 \quad \text{ОДУ} \Rightarrow$$

$$\int \frac{D\rho}{\rho} = 2x_1 Dt = \int \frac{2X_1}{1+tX_1} Dt \Rightarrow \ln\left|\frac{\rho}{C_1}\right| = 2\ln|1+tX_1| \Rightarrow$$

$\rho = C_1(1+tX_1)^2$, при $t=0$, $x_1 = X_1$, $\rho = \rho_0 \Rightarrow \rho_0 = C_1 \Rightarrow$

$$\rho = \rho_0(1+tX_1)^2$$

Когато непрекъснатата среда е несвиваема течност, тогава $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \Rightarrow$ ЗЗМ $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho v_{k,k}=0 \Rightarrow$

$\rho v_{k,k}=0$, но $\rho \neq 0 \Rightarrow v_{k,k}=0$ т.е. дивергенцията на скоростта е 0, където $v_{k,k}$ е уравнението на непрекъснатостта

Зад. Покажете, че полето на скоростите $v_i=\frac{Ax_i}{r^3}$, $i=1,2,3$ и $r^2=x_ix_i$, $A=const$, удовлетворява уравнението на непрекъснатостта за несвиваема течност, т.е. $v_{k,k}=0$

Реш.

Трябва да покажем, че $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0$ т.е.

$$A\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\right)=A\frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}-x_1\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}2x_1}{r^6}=$$

$$=A\frac{r^{3/2}-r^{1/2}3x_1^2}{r^6}$$

$$A\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\right)=A\frac{r^{3/2}-r^{1/2}3x_2^2}{r^6}$$

$$A\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\right)=A\frac{r^{3/2}-r^{1/2}3x_3^2}{r^6}\Rightarrow\sum=0$$

Зад. Дадено е плоско движение на несвиваема течност $v_1=\frac{A(x_1^2+x_2^2)}{r^4}$, $v_2=\frac{A2x_1x_2}{r^4}$, $v_3=0$, където $r^2=x_1^2+x_2^2$. Покажете че такова поле от скорости удовлетворява уравнението на непрекъснатостта $v_{k,k}=0$

Реш

$$V_{1,1} = A\,\frac{2x_1 r^4 - (x_1^2 - x_2^2)\,2r^2\,2x_1}{r^8}$$

$$V_{2,2} = A\,\frac{2x_1 r^4 - x_1 x_2\,4r^2 x_2}{r^8}$$

$V_{3,3}$

$\sum_i = 0$

Зад. Разгледайте плоско течение на несвиваема течност, в което $V_1 = -\frac{Ax_2}{r^2}$, където $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Намерете V_2 във всяка точка на потока, ако $V_2 = 0$ при $x_1 = 0$ за всички значения на x_2

Реш $V_{i,i} = 0$, $V_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{Ax_2}{x_1^2+x_2^2}\right) = \frac{Ax_2\,2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2}$

$$V_{1,1} = -V_{2,2} = \frac{2Ax_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \Rightarrow -\frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{2Ax_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \Rightarrow V_2 = -2A\int\frac{x_2\,dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

$$V_2 = -Ax_1\int\frac{d\,(x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{Ax_1}{x_1^2+x_2^2} + C_1(x_1), \quad 0 = C_1(0)$$

Зад. Напрегнатото ~~...~~ състояние на тяло в точката $(1,1,-2)$ относно координатната система $x_1x_2x_3$ е:

$$\begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}5 & 2{,}5 \\ 3{,}5 & 0{,}0 & -1{,}5 \\ 2{,}5 & -1{,}5 & 1{,}0 \end{pmatrix} \times 10^6\ (Pa).$$

Намерете нормалното и тангенциалното напрежение в тази точка на повърхността на вътрешна за тяло сфера с уравнение $x_1^2 + (x_2-2)^2 + x_3^2 = 6$

Реш.

$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\sigma_i = \sigma_{ij} n_j$. Търсим n_j

Нужно е да намерим единичната нормала $\vec{n}$ за сферата ξ.

$$\xi = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 = 0$$

$$\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{\nabla}\xi}{|\vec{\nabla}\xi|} = \frac{2x_1\hat{e}_1 + 2(x_2-2)\hat{e}_2 + 2x_3\hat{e}_3}{\sqrt{4x_1^2 + 4(x_2-2)^2 + 4x_3^2}}$$

$$\vec{n}(1,1,2) = \frac{2\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 - 4\hat{e}_3}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3) \Rightarrow$$

$$\sigma_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = \left(2.0\frac{1}{\sqrt{6}} - 3{,}5\frac{1}{\sqrt{6}} - 2{,}5\frac{2}{\sqrt{6}}\right)10^6(Pa) =$$

$$= -\frac{6{,}5}{\sqrt{6}}10^6(Pa)$$

За σ_2 и σ_3 сметката е същата и това са трите компоненти на вектора на напрежението. Оттук продължава задачата. Нормалното напрежение в точката $(1,1,-2)$

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}\,\vec{n} = -\frac{17}{6}\,MPa$$

$$\sigma = \sqrt{|\vec{\sigma}|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\frac{201}{12} - \frac{289}{36}} \approx 8{,}67\,MPa$$

Зад. Намерете компонентите на тензора на инфинитезималните деформации на изотропно тяло с модул на Юнг E и число на Поасон ν до

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad \text{Реш. } \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$