УМНС 05.03.15

Деф Декартов тензор от втори ранг е обект, който може да се представи като 3×3 реална матрица във всяка декартова коорд. система, със свойството, че ако матрицата $[a_{ij}]$ е представянето на този обект в x_i системата и матрицата $[a'_{ij}]$ е представянето на този обект в x'_i системата, то a_{ij} и a'_{ij} се трансформират по следния начин

$$a'_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}a_{pq} \quad ; \quad a_{ij} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}a'_{pq}$$

Тогава a_{ij} и a'_{ij} се наричат компоненти на тензор от втори ранг в x_i и x'_i, където α - декартови косинуси, т.ч.

$$\alpha_{ij} \overset{def}{=} \vec{e}\,'_i \vec{e}_j = \cos(\vec{e}\,'_i, \vec{e}_j)$$

Деф Тензор от по-висок ранг (N), където N е цяло положително число е обект, който може да се представи като 3^N реални числа във всяка декартова координатна система, със св-вото: ако $(a_{ijk\ldots})$ е представянето на този обект в системата x_i, и $(a'_{ijk\ldots})$ е представянето на този обект в x'_i системата, то $a_{ijk\ldots}$ и $a'_{ijk\ldots}$ се подчиняват на следните трансформационни закони

$$a'_{ijk\ldots} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\ldots a_{pqr\ldots} \quad ; \quad a_{ijk\ldots} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{rk}\ldots a'_{pqr\ldots}$$

Тогава $a_{ijk\ldots}$ и $a'_{ijk\ldots}$ са компонентите на тензор от ранг N

Тензорно произведение

Тв/ Ако a_{ij} са компонентите на тензор A от втори ранг и b_k са компонентите на вектор $\vec{b}$, то $a_{ij} b_k$ са компонентите на тензор от трети ранг $A \otimes b$

Док

$a_{ij} b_k$ са $3^3 = 27$ числа ($a_{ij} = 9$ числа, $b_k = b_1 b_2 b_3$)

Нека $a_{ij} b_k = c_{ijk}$. Тогава $c'_{ijk} = a'_{ij} b'_k =$

$= (\alpha_{ip}\alpha_{jq} a_{pq})(\alpha_{km} b_m) = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{km} a_{pq} b_m =$
$\alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{km} c_{pqm}$ □

Аналогично за вторият трансформационен закон

Пермутиращ тензор на Леви-Чевита, ε-символ

ε_{ijk} - пермутиращ тензор от трети ранг

$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon'_{ijk}$ (единственият тензор с това свойство)

Деф $\varepsilon_{ijk} \stackrel{def}{=} \vec{e}_i . (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ако } ijk \text{ се променят в цикъл } (1,2,3;\ 2,3,1;\ 3,1,2) \\ -1, & \text{ако } ijk \text{ се променят в нецикличност} \\ 0, & \text{ако два или всички индекси са еднакви} \end{cases}$$

ФАКТ $e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$

Известно е че $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ е смесено произведение

и $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) . \vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]_i [\vec{c}]_i =$
$= [\varepsilon_{ijk} a_j b_k] c_i = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$

Забелязваме че $\varepsilon_{ijk} = [\vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k]$

За всеки три вектора $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ знаем че $[\vec{b}\vec{c}\vec{d}] = \varepsilon_{ijk} b_i c_j d_k$ е скалар (тензор от ранг 0), представляващ обема на паралелепипед, определен от векторите $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Следователно

$$\varepsilon_{ijk} b_i c_j d_k = \varepsilon'_{ijk} b'_i c'_j d'_k$$

$$\varepsilon_{ijk} b_i c_j d_k - \varepsilon'_{ijk} b'_i c'_j d'_k = \varepsilon_{ijk} b_i c_j d_k - \varepsilon'_{ijk} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} b_p c_q d_r = \varepsilon_{pqr} b_p c_q d_r - \varepsilon'_{ijk} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} b_p c_q d_r = (\varepsilon_{pqr} - \varepsilon'_{ijk} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr}) b_p c_q d_r = 0 \Rightarrow \varepsilon_{pqr} = \varepsilon'_{ijk} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr}$$

аналогично за вторият закон

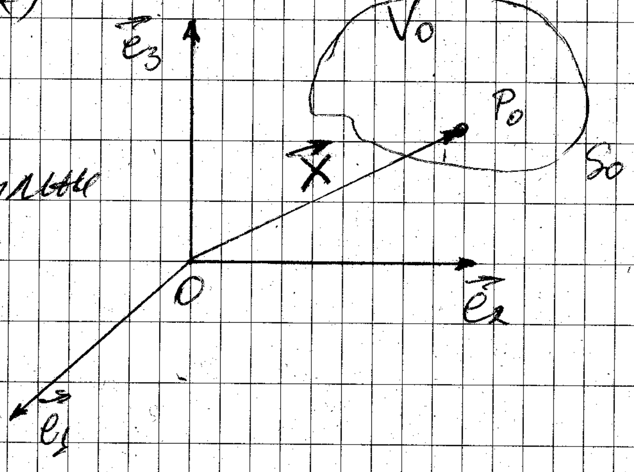
Механика на непрекъснатите среди

Вектор на преместването

В МНС се приема че веществото е разпределено по непрекъснат начин в цялата област заемана от тялото

Нека в момента $t=0$, тялото заема в пространството областта V_0, заградена от затворена гладка повърхнина

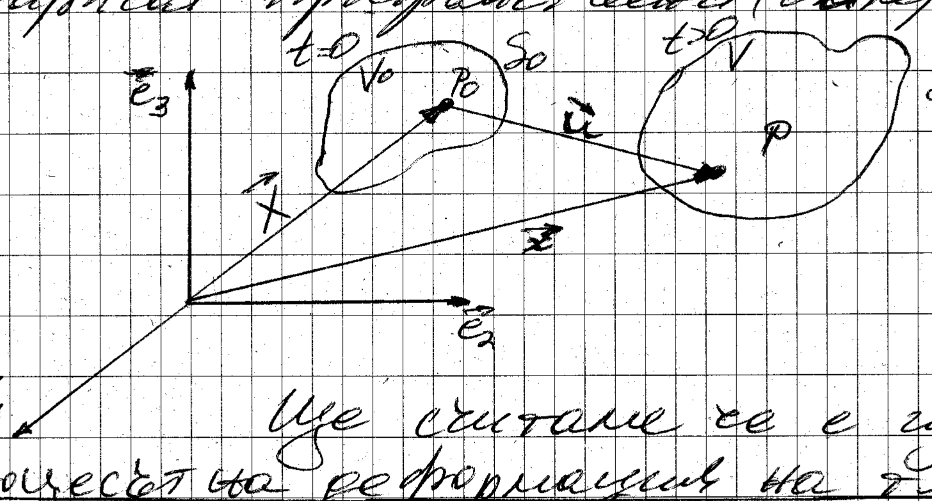
Нека произволна точка $P_0 \in V_0 + S_0$ има радиус вектор $\vec{X} = X_i e_i$ (*)



Деф: Координатите X_i на P_0 в $t=0$ се наричат материални (Лагранжиеви) координати

Предполагаме че под влияние на външни сили и температури, тялото се деформира. Това означава че разстоянието между точките на тялото се отличава от същите точки при $t=0$

Нека в момента t тялото заема в прост-то областта V, заградена от затворена гладка повърхнина S. Материалната точка P_0 заема ново положение $P \in V+S$ с радиус вектор $\vec{x} = x_i e_i$ (#) спрямо същата коорд. система. Координатите x_i, $i=1,2,3$ се наричат пространствени (Ойлерови) коорд-ти



Ще считаме че е известен процесът на деформация на тялото, ако са известни функциите $x_i = x_i(X_1 X_2 X_3 t) = x_i(\vec{X} t)$ (или $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X} t)$) Ще предполагаме също, че $\exists$-т и обратните функции $X_i = X_i(x_1 x_2 x_3 t) = X_i(\vec{x} t)$ (или $\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$)

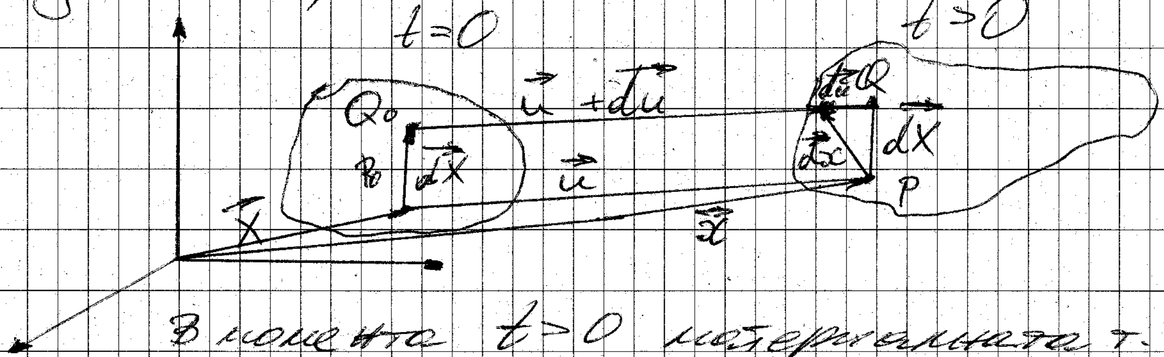
Деф .....

Векторът $\vec{u}$ с компоненти $u_i = x_i - X_i$ се нарича вектор на преместването. Изразен в Лагранжеви координати векторът на преместването $\vec{u}$ е $u_i = x_i(X_i t) - X_i$. Изразен в Ойлерови координати векторът на преместването е $u_i = x_i - X_i(x_i t)$

Тензори на деформациите

Интересуваме се, как се изменят разстоянията в малка околност на т. P_0

Нека $Q_0 \in V_0+S_0$ е съседна точка на P_0 с радиус вектор $\vec{X}+d\vec{X}$



В момента $t>0$ материалната т. Q_0 се премества в т. $Q \in V+S$ с радиус вектор $\vec{x}+d\vec{x}$

Искаме да разберем как се променя дължината на вектора $d\vec{X}$ от $t=0$ до $t>0$

$(dX)^2 = d\vec{X}\,d\vec{X} = dX_i\,dX_i = (dX_1)^2+(dX_2)^2+(dX_3)^2 = \delta_{IJ}\,dX_I\,dX_J$

$(dx)^2 = d\vec{x}\,d\vec{x} = dx_i\,dx_i = (dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2 = \delta_{IJ}\,dx_i\,dx_J$

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_I}\,dX_I$$

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2}dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3}dX_3$$

$dX_K = \dfrac{\partial X_K}{\partial x_J}\,dx_J$. Следователно $(dx)^2-(dX)^2 =$

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_I}dX_I\,\frac{\partial x_k}{\partial X_J}dX_J - \delta_{IJ}\,dX_I\,dX_J =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_I}\frac{\partial x_k}{\partial X_J} - \delta_{IJ}\right)}_{2E_{IJ}\text{ - тензор на трансформацията}} dX_I\,dX_J$$

! деф $E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right)$ - Лагранжевият тензор на крайните деформации, който е от втори ранг

Аналогично за

$(dx_i)^2 - (dX_i)^2 = 2e_{ij}\,dx_i\,dx_j$, където $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right)$

$\left(\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial X_1}\ \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial X_2}\ \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial X_3}\right)$ - градиента на вектора x_1

$E_{ij} = E_{ji}$, $e_{ij} = e_{ji}$ - симетрични