ЗМНС 02.04.15

Разгл. паралелепипед с обем V_0, чиито ребра са успоредни на главните направления на тензора на деформациите и имат дължини dX_1, dX_2, dX_3. След деформацията пак имаме паралелепипед с обем V и дължини на ребрата

$dx_1 = (1+\varepsilon_I)dX_1$ тензор на деформациите

$dx_2 = (1+\varepsilon_{II})dX_2$ ε_{ij}

$dx_3 = (1+\varepsilon_{III})dX_3$, защото

$$d\vec{x} = d\vec{X} + \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix} d\vec{X}$$

Като пренебрегнем втората и третата степен на компонентите на тензора на деформациите в уравнение с линейните членове, ще получим

$$\frac{V-V_0}{V_0} = \frac{(1+\varepsilon_I)(1+\varepsilon_{II})(1+\varepsilon_{III})dX_1 dX_2 dX_3 - dX_1 dX_2 dX_3}{dX_1 dX_2 dX_3} =$$

$= \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} = I_\varepsilon$, където $\frac{V-V_0}{V_0}$ - обемно разширение

Условие за съвместимост на деформациите

Нека ε_{ij} са дадени функции на координатите. Разгл. произволен фиксиран момент t и затова няма да пишем зависимостта от t.

Разгл. у-та

$u_{i,j} + u_{j,i} = 2\varepsilon_{ij}$ където запетайката $u_{i,j}$ означава частна производна съответно по второто, и ε_{ij} участва в частни производни за u_1, u_2, u_3

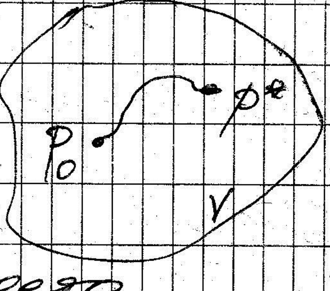
Следователно имаме преопределена система. Изведохме условията за съвместимост, получаване че системата няма решение, ако ε_{ij} са произволно зададени функции.

Поставяне на задачата:

Да намерим ограниченията, които трябва да се наложат върху функциите $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ за да имаме еднозначно решение $u_i(x_1, x_2, x_3)$ на уравненията $u_{i,j} + u_{j,i} = 2\varepsilon_{ij}$, при условие че в произволно фиксирана т. $P_0(x_1^0\, x_2^0\, x_3^0)$ на тялото са ни известни преместванията $u_i^0 = u_i(x_1^0\, x_2^0\, x_3^0)$ и компонентите на тензора на ротация $\omega_{ij}^0 = \omega_{ij}(x_1^0\, x_2^0\, x_3^0)$. Първо разгл. едносвързана област V, заета от непрекъснатата среда

Нека $P^*(x_1^*\, x_2^*\, x_3^*)$ е произволна т. от V_0

$u_i^* = u_i(x_1^*\, x_2^*\, x_3^*)$. Тогава



$$u_j^* = u_j^0 + \int_{P_0}^{P^*} du_j = u_j^0 + \int_{P_0}^{P^*} u_{j,k}\, dx_k =$$

$$= u_j^0 + \int_{P_0}^{P^*} \varepsilon_{jk}\, dx_k + \int_{P_0}^{P^*} \omega_{jk}\, dx_k \text{, където}$$

$$\int_{P_0}^{P^*} \omega_{jk}\, dx_k = \int_{P_0}^{P^*} \omega_{jk}\, d(x_k - x_k^*) \overset{\text{интегр. по части}}{=} \omega_{jk}(x_k - x_k^*)\Big|_{P_0}^{P^*} -$$

$$- \int (x_k - x_k^*)\, \omega_{jk,l}\, dx_l \text{, но}$$

$$\omega_{jk}(x_k - x_k^*)\Big|_{P_0}^{P^*} = 0 - \omega_{jk}^0 (x_k^0 - x_k^*) \Rightarrow$$

$$u_j^* = u_j^0 + \omega_{jk}^0 (x_k^* - x_k^0) + \int_{P_0}^{P^*} [\varepsilon_{jk} + (x_k^* - x_k)\omega_{jk,e}] \, dx_e$$

$\omega_{jk,e}$ го преобразуваме по следния начин

$$\omega_{jk,e} = \frac{1}{2}(u_{j,ke} - u_{k,je}) - \frac{1}{2}\underbrace{(u_{e,jk} - u_{e,jk})}_{0} =$$

$$\frac{1}{2}(u_{j,e} + u_{e,j})_{,k} - \frac{1}{2}(u_{k,e} + u_{e,k})_{,j} = \varepsilon_{je,k} - \varepsilon_{ke,j}$$

Заместваме го горе и получаваме

$$u_j^* = u_j^0 + \omega_{jk}^0 (x_k^* - x_k^0) + \int_{P_0}^{P^*} G_{je} \, dx_e \text{, където}$$

$G_{je} := \varepsilon_{je} + (x_k^* - x_k)(\varepsilon_{je,k} - \varepsilon_{ke,j})$ (**). Понеже преместванията u_j^* не зависят от пътя по ~~който интегриране~~, то

$\int_{P_0}^{P^*} G_{je} dx_e$ не зависи от пътя на интегриране и единствено подинтегралната функция G_{je} е с пълни диференциали т.е. $G_{je} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

Th

Ако $\vec{F}$ е непрекъснато векторно поле в областта D и $\int \vec{F} \, d\vec{r}$ не зависи от пътя на интегриране в D, то $\vec{F} = \nabla f$ за някаква функция f

$\Rightarrow$ $G_{je} dx_e$ са точен диференциал

$df_i = G_{j1} dx_1 + G_{j2} dx_2 + G_{j3} dx_3$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = G_{ji}$ т.е. $G_{ji,e} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_e} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_e \partial x_i} = G_{je,i}$. От (**)

$\Rightarrow$

може $\delta_{ki}\varepsilon_{je,k} = \varepsilon_{je,i}$

$$G_{je,i} := \varepsilon_{je,i} - \delta_{ki}(\varepsilon_{je,k} - \varepsilon_{ke,j}) + (x_k^* - x_k)(\varepsilon_{je,k} - \varepsilon_{ke,j}) =$$

$$= G_{ji,e} := \varepsilon_{ji,e} - \delta_{ke}(\varepsilon_{ji,k} - \varepsilon_{ki,j}) + (x_k^* - x_k)(\varepsilon_{ji,ke} - \varepsilon_{ki,je})$$

$\varepsilon_{ij,ke} + \varepsilon_{ke,ij} - \varepsilon_{ki,je} - \varepsilon_{je,ik} = 0$. Това са 6 ур-я, които се наричат условия на Сен Венан за съвместимост на деформациите които са явяват частни диференциални ур-я ~~прв~~ с трети производни по u-тата

Тензор на напреженията

Външни сили, които действат на тялото и причиняват трансформация са 2 вида

Ще предполагаме, че съществува векторна функция $f(\vec{x}, t)$, наречена масова сила, такава че силата, която действа на произволна част от тялото, заемащо област (обемност) V в момента t е равна на $\int_V \rho f \, dV$, където $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ е плътността на тялото f и има размерност на ускорение.

Пример:

$f = \vec{g} = const$ (земно ускорение), ди-тежко

$$\int_V \rho(\vec{x}, t) \, dV = m = \text{масата на } V$$

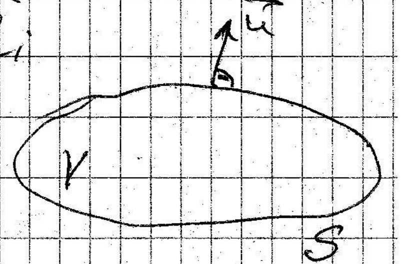
Повърхнинни сили

Това са сили, които действат върху всяка повърхнина вътре в тялото или на границата му

Ще предполагаме, че съществува векторна функция $\vec{\sigma}$ (вектор на напрежението), която действа в/у повърхнината на произволна част от тялото, заемащо областта V в момента t, означена с S равнина $\int_S \vec{\sigma}\, dS$

Тук имаме размерност на налягане, но $\vec{\sigma}$ не е непременно перпендикулярен

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\cancel{\vec{x}}, t, \vec{n}) = \sigma_i(\vec{X}, t, \vec{n})\,\hat{e}_i$$



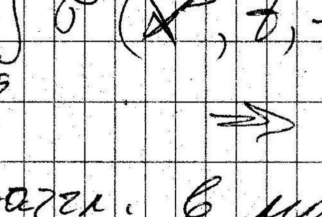
Силата с която частта от тялото заемащо областта V, действа в/у останалата част извън V

$$\int_S \vec{\sigma}(\vec{X}, t, \vec{n})\, dS \Rightarrow \int_S \vec{\sigma}(\vec{x}, t, \vec{n})\, dS = -$$

$$-\int_S \vec{\sigma}(\vec{X}, t, -\vec{n})\, dS$$, тъй като S е произволна

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(\vec{X}, t, \vec{n}) = -\vec{\sigma}(\vec{X}, t, -\vec{n})$$

Да разгл. в момента t част от тялото представляваща произволен тетраедър със стени по координатните равнини и основа $\perp$ на $\vec{n}$



Приемаме че тетраедъра е в равновесие (всички сили се уравновесяват)

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{\Delta S_j}\vec{T}(\vec{x},t,-\vec{e}_j)\,dS+\int_{\Delta S}\vec{T}(\vec{x},t,\vec{n})\,dS+\int_{\Delta V}\rho\vec{f}\,dV=\vec{0}$$

Като използваме ТВ за средните стойности получаваме

$$\sum_{j=1}^{3}\vec{T}(\vec{x}^{(j)},t,-\vec{e}_j)\Delta S_j+\vec{T}(\vec{x}^{(n)},t,\vec{n})\Delta S+\rho(\vec{x}^*,t)\vec{f}(\vec{x}^*,t)\Delta V=\vec{0}$$

$$\Delta S_j=(\Delta S)\cos\angle(\Delta S,\Delta S_j)\Rightarrow(\Delta S)\cos(\vec{n},\vec{e}_j)=(\Delta S)n_j$$

защото $n_j=\cos(\vec{n},\vec{e}_j)$ $\rightarrow$ Съкращаваме на ΔS и $h\to 0$

$$\Rightarrow \vec{T}(\vec{x},t,-\vec{e}_j)n_j+\vec{T}(\vec{x},t,\vec{n})=\vec{0}$$

Да означим с $T_{ij}(\vec{x},t)$ компонентите на вектора на напрежение при нормала $\vec{e}_j$ т.е.

$T_{ij}(\vec{x},t)=T_i(\vec{x},t,\vec{e}_j)$ добива вида

$$T_i(\vec{x},t,\vec{n})=T_{ij}(\vec{x},t)n_j \quad \text{или} \quad T_i=T_{ij}n_j \quad (T')$$

T_{ij} са компоненти на тензор от ранг 2

от $T_i = T_{ij}n_j$

$$\alpha_{ij}T_j' = T_{ij}\alpha_{\ell j}n_\ell$$