ТВ 23.04.15

Зад. От 10 стандартни тестета от 52 карти се теглят по една карта. Намерете вероятността в получената ръка от 10 карти

а) да няма повтарящи се

$$P(A) = \frac{52.51\ldots 4}{52^{10}} = \frac{\frac{52!}{(52-10)!}}{52^{10}}$$

б) броят на червените карти да е равен на броя на черните

$$P(B) = \frac{\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5}{52^{10}}$$

ξ → броят на „успехите" в серия от n опита

вероятността за успех p във всеки опит е

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ - Биномно}$$

в) да има точно 4 валета (ξ)

$$P(C) = \frac{\binom{10}{4}\left(\frac{4}{52}\right)^4\left(\frac{48}{52}\right)^6}{52^{10}}$$

г) да има четири спатии, три карота, две купи и една пика

$$P(D) = \frac{\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}\left(\frac{13}{52}\right)^4\left(\frac{13}{52}\right)^3\left(\frac{13}{52}\right)^2\left(\frac{13}{52}\right)}{52^{10}}$$

Зад. Прехвърляме последователно тесте от 52 карти. Ако за първи път видим червено асо на $6^{-та}$ позиция, каква е вероятността след това да видим червено асо преди черно асо

Зад. В урна има n топки, които могат да бъдат бели или черни. Всички възможни предположения за броя на белите топки са равновероятни. Да се пресметне вероятността в урната да няма черни топки при условие, че в извадка с обем k има само бели топки.

Реш.

$H_i = \left\{ \begin{array}{l} \text{в урната има} \\ i \text{ бели топки} \end{array} \right\} \quad i = 0, 1 \ldots 10$

Формула на Бейс

$$P(H_n / A) = \frac{P(A/H_n)\,P(H_n)}{\sum_i P(A/H_i)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{n+1}}{\sum_i \left(\frac{i}{n}\right)^k \frac{1}{n+1}}$$

$A = \{\text{в извадка от } k \text{ топки няма черни}\}$

$P(H_i) = \frac{1}{n+1} \quad i = 0, 1 \ldots n$

$P(A/H_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^k$, където k - брой опитания

(при положение, че разглеждаме с връщане)

$$\Rightarrow \frac{n^k}{\sum_i i^k} = \frac{n^k}{0^k + 1^k + \ldots + n^k}$$

Зад. Студент трябва да отговори на изпитен въпрос с 4 възможни отговора, от които само един е верен. Вероятността студентът да знае отговора на въпроса е 4/5, а да не го знае е 1/5. Ако студентът налучка отговора, вероятността да отговори вярно е 1/4. Каква е вероятността:

а) студентът да отговори вярно

$H_1 = \{$знае отговора$\}$, $H_2 = \{$не знае отговора$\}$

$P(H_1) = 4/5$ $\qquad$ $P(H_2) = 1/5$

$A = \{$студентът отговаря правилно$\}$

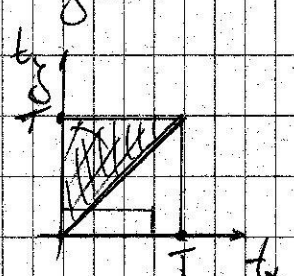
$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = 1\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{17}{20}$$

б) Ако студентът е отговорил правилно на въпроса той наистина да е знаел верния отговор

$$P(H_2/A) = \frac{P(A/H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{1/4\cdot 1/5}{17/20} = \frac{1/20}{17/20} = 1/17$$

Зад. В два случайни момента t_x и t_y от интервала $[0, T]$ независимо едно от друго трябва да се появят събитията X и Y. Събитията се считат за съвпадащи, ако $-a \le t_x - t_y \le b$, където $a > 0$ и $b > 0$. Намерете вероятността:

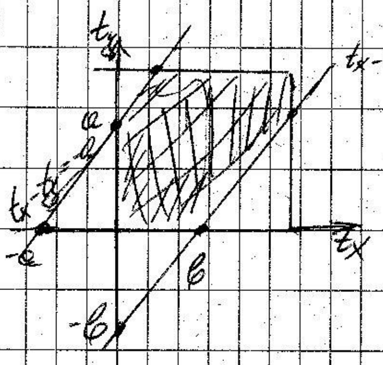
а) X да се появи преди Y



$$A: t_x < t_y, \quad P(A) = \frac{M(A)}{M(\Omega)} = \frac{\frac{T^2}{2}}{T^2} = 1/2$$

в) X и Y да са съвпадащи

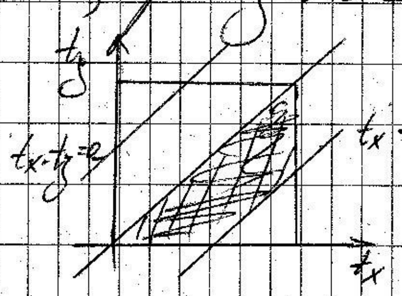
B: $-a \le t_x - t_y \le b$



$$P(B) = \begin{cases} \dfrac{T^2 - \dfrac{(T-a)^2}{2} - \dfrac{(T-b)^2}{2}}{T^2} & 0 \le a \le T,\ 0 \le b \le T \\[2ex] \dfrac{T^2 - \dfrac{(T-b)^2}{2}}{T^2}, & a > T,\ 0 \le b \le T \\[2ex] \dfrac{T^2 - \dfrac{(T-a)^2}{2}}{T^2} & b > T,\ 0 \le a \le T \end{cases}$$

г) Y да се появи преди X, при условие че X и Y са съвпадащи

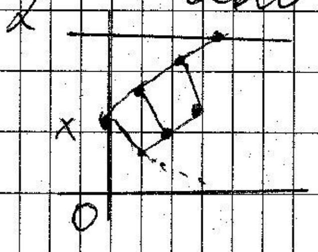
$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}$$



Зад. Последователно се хвърля монета. Ако се падне лице, играчът печели 1 лев, а ако се падне герб, той губи 1 лев. В началото на играта играчът има x лева. Играта завършва или когато играчът събере предварително определена сума от α лева, или когато проиграе всичките си пари. Каква е вероятността играчът да се разори?

Реш.

$P(x)$ - вероятността играчът да се разори, ако разполага с x лева



$$\begin{cases} P(x) = \frac{1}{2}P(x+1) + \frac{1}{2}P(x-1), & 1 \le x \le \alpha - 1 \\ P(0) = 1 \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$p(x) = ax + b$

$p(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$

$p(1) = a \cdot 2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1/2$

$$p(x) = 1 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

Зад. Петима студенти се явяват на изпит по теория на вероятностите, като вероятността всеки един от тях да си вземе изпита е равна на 3/5. Нека ξ е броят на студентите които са взели изпита успешно. Намерете разпределението на ξ, $D\xi$, $E\xi$, $E(\xi^2 - 1)$

Реш.

$\xi \in Bi(5, 3/5)$

$$P(\xi = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{5-k} \qquad k = 0..5$$

$E\xi = 5 \cdot 3/5 = 3$, $\quad D\xi = 5 \cdot 3/5 \cdot \frac{2}{5} = 6/5$

$$E(\xi^2 - 1) = E\xi^2 - 1 = D\xi + (E\xi)^2 - 1 = 6/5 + 9 - 1 = \frac{6}{5} + 8 = \frac{46}{5}$$

$$\underline{D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2}$$