ТВ 27.05.15

$\xi \in Ex(\lambda)$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_0^\infty x\, de^{-\lambda x} = \underbrace{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty}_{0-0} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty de^{-\lambda x} = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = Ex = \frac{1}{\lambda}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Зад. Времето за чакане в бензиностанция е случайна величина $\xi \in Ex(\lambda)$, където средното време на чакане е t_0. Да се намери вероятността на събитията

$$A = \left\{\frac{t_0}{2} \leq \xi \leq \frac{3t_0}{2}\right\} \text{ и } B = \{\xi \geq 2t_0\}$$

Реш. $\xi \in E\xi(\lambda)$, $t_0 \to$ средно време за чакане $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{t_0}$

$$P\left(\frac{t_0}{2} \leq \xi \leq \frac{3t_0}{2}\right) = \int_{t_0/2}^{3t_0/2} \frac{1}{t_0} e^{-\frac{1}{t_0}x} = F_\xi(3/2\, t_0) - F_\xi(t_0/2) =$$

$$= 1 - e^{-\frac{3t_0}{2}\times\frac{1}{t_0}} - \left(1 - e^{-\frac{t_0}{2}\times\frac{1}{t_0}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-3/2}$$

$$P(B) = \int_{2t_0}^{\infty} \frac{1}{t_0} e^{-\frac{1}{t_0}x} dx = 1 - F_\xi(2t_0) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{2t_0}{t_0}}\right) = e^{-2}$$

Зад. В магазин работят две касиерки. Предполагаме че времето необходимо за обслужване на клиент на всяка от двете опашки е експоненциално разпределена случайна величина с математическо очакване 8 минути за първата опашка и 5 минути за втората. Клиент, избран по случаен

Някой машина, е чакал по-малко от 4 минути
Каква е вероятността тогава е бил на първата машина.

$\xi_1 \in Ex\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{8}$ Бейс

$\xi_2 \in Ex\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$.

H_1 = {чака на първата машина}, H_2 = {чака на втората машина}
хипотеза

A = {чака по-малко от 4 мин}

$$P(H_1 / A) = \frac{P(A/H_1)\,P(H_1)}{P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2)}, \quad P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$
чака на си. машина

$P(A/H_1) = P(\xi_1 < 4) = F_{\xi_1}(4) = 1 - e^{-\frac{1}{8}\cdot 4} = 1 - e^{-1/2}$

$P(A/H_2) = P(\xi_2 < 4) = F_{\xi_2}(4) = 1 - e^{-1/5 \cdot 4} = 1 - e^{-4/5}$

$$\Rightarrow P(H_1/A) = \frac{1 - e^{-1/2}}{2 - e^{-1/2} - e^{-4/5}}$$

Зад. Времето за преглед на пациент е експоненциално разпределена случайна величина с очакване 30 минути. За преглед има записани двама пациенти, първия в 11:00, а втория в 11:30, като двамата пристигат точно в определения час. Ако прегледа на първия не е завършил, втория ще чака. Да се пресметне средно, колко време ще прекара в поликлиниката втория пациент.

Реш.

$\xi_1 \in Ex\left(\frac{1}{30}\right)$, $\xi_2 \in Ex\left(\frac{1}{30}\right)$, където ξ_i е времето за преглед на i-тия пациент

$E\xi_2$, когато $\xi_1 \le 30$. Ако $\xi_1 > 30 \Rightarrow E(\xi_2+\xi_1-30)$

$= E[\max(\xi_2+\xi_1-30, \xi_2)] = E[\xi_2 + \max(\xi_1-30,0)] =$

$E\xi_2 + E\max(\xi_1-30,0) = 30 + \int_0^\infty \max(x-30,0)\frac{1}{30}e^{-\frac{1}{30}x}dx =$

$= 30+\int_{30}^\infty (x-30)\frac{1}{30}e^{-\frac{1}{30}x}dx = 30 + \int_{30}^\infty \frac{x}{30}e^{-\frac{1}{30}x}dx - 30\int_{30}^\infty \frac{1}{30}e^{-\frac{1}{30}x}dx =$

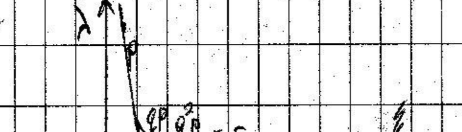
$= 30 - \int_{30}^\infty x\,de^{-\frac{1}{30}x} - \int_{30}^\infty e^{-\frac{1}{30}x}dx = 30 - xe^{-\frac{1}{30}x}\Big|_{30}^\infty + \cancel{\int_{30}^\infty e^{-\frac{1}{30}x}dx} - \cancel{\int_{30}^\infty e^{-\frac{1}{30}x}dx} =$

$= 30+30e^{-1} = 30+\frac{30}{e}$

Зад. 4 Нека случайната величина $\xi \in Ex(\lambda)$. Каква е вероятността цялата част на ξ да е четно число?

Реш. $\xi\in Ex(\lambda)$, $P(A)$ където $A = \{$цялата част на ξ е четно число$\}$

$[x] \to$ цяла част на x, като $[2]=2$, $[3,14]=3$, $[-3,14]=-4$



$\sum_{k=0}^\infty c^k = \frac{1}{1-c}$, $c<1$, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$P(\xi\in\bigcup_{k=0}^\infty[2k,2k+1]) = ?$ но то е равно

на $\sum_{k=0}^\infty P(\xi\in[2k,2k+1]) = \sum_{k=0}^\infty [F_\xi(2k+1)-F_\xi(2k)] = \sum_{k=0}^\infty (e^{-\lambda 2k} - e^{-\lambda(2k+1)})$

$= \sum_{k=0}^\infty e^{-2\lambda k}(1-e^{-\lambda}) = (1-e^{-\lambda})\sum_{k=0}^\infty (e^{-2\lambda})^k = \frac{1-e^{-\lambda}}{1-e^{-2\lambda}}$

Нормално разпределение

$\xi \in N(\mu, \sigma^2)$, ако $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

плътност

$E\xi = \mu$, $D\xi = \sigma^2$, $\sqrt{D\xi}$ → стандартно отклонение

$\frac{\xi-\mu}{\sigma} \in N(0,1)$ → стандартно нормално разпределение

Зад. Предполагаме, че височината на двадесетгодишни младежи е нормално разпределена случайна величина $a = 170$, $\sigma = 5$. Да се намери вероятността от пет случайно избрани младежи поне един (точно двама) да има ръст от 165 до 175 см. Каква е вероятността младеж да бъде по-висок от 170 см, ако се знае, че той е по-висок от 160 см?

Реш.

$\xi \in N(170, \sigma^2 = 5.5 = 25)$, $p = P(165 \le \xi \le 175) =$

$= P\left(\frac{165-170}{5} \le \underbrace{\frac{\xi-170}{5}}_{=\eta} \le \frac{175-170}{5}\right) = P(-1 \le \eta \le 1)$

$\eta \in N(0,1)$, $F_\eta(x) = \Phi(x)$ - функция на разпределение на нормално разпределена величина

$P(-1 \le \eta \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,8413 - P(\eta \ge 1) = 0,8413 - (1 - \Phi(1)) =$
$2 \cdot 0,8413 - 1.$

$\beta \in Bi(5, p)$, $P(\beta \ge 1) = 1 - P(\beta = 0) = 1 - \binom{5}{0} p^0 q^5 = 1 - q^5 = 1 - (1-p)^5$

$P(\xi > 170 / \xi > 160) = \frac{P(\xi > 170)}{P(\xi > 160)} = \frac{1 - P(\xi \le 170)}{1 - P(\xi \le 160)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - P\left(\frac{\xi-170}{5} \le \frac{160-170}{5}\right)}$

$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - P(\eta \le -2)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - [1 - P(\eta \le 2)]} = \frac{1/2}{P(\eta \le 2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,9773}$