ТВ 25.03.15

Зад. Хипотези

В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират три топки, които след игра се връщат обратно в кутията. За втората игра също се избират три топки. Каква е вероятността те да са нови

Реш.

H_k = {изтеглени са k нови топки за първата игра}

$k = 0, 1, 2, 3$

A = {изтеглени са 3 нови топки за втората игра}

$$P(A) = \sum_{k=0}^{3} P(A/H_k)P(H_k), \quad P(H_0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$$

$$P(H_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} \Rightarrow P(H_k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{7}{3}} \quad k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow$$

$$P(H_1) = \frac{4.3}{35} = \frac{12}{35}, \quad P(A/H_0) = \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}}, \quad P(A/H_1) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{0}}{\binom{7}{3}}$$

$P(A/H_2) = 0$, $P(A/H_3) = 0$ (няма начин след като сме изтеглили 2 нови на първата игра, да искаме да изтеглим 3 нови при положение че новите топки са 4)

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{35} \cdot \frac{1}{35} + \frac{1}{35} \cdot \frac{12}{35} = \frac{16}{35^2}$$

Зад. Дадени са n урни и във всяка от тях има m бели и k черни топки. От първата урна се тегли една топка и се прехвърля във втората, след това от втората се прехвърля една топка в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде изтеглена бяла топка?

Реш $\underset{1}{\boxed{m/k}}\ \underset{2}{\boxed{m/k}}\ \dots\ \underset{n}{\boxed{m/k}}$. $P(H_б^n) = ?$

$H_б^1$, $H_ч^1$, $H_б^k, H_ч^k$, $k = 1 - n$

бяла от първата урна; черна от първата урна

$$P(H_б^2) = P(H_б^2 | H_б^1) P(H_б^1) + P(H_б^2 | H_ч^1) P(H_ч^1) =$$

$$= \frac{m+1}{m+k+1} \cdot \frac{m}{m+k} + \frac{m}{m+k+1} \cdot \frac{k}{m+k} = \frac{m}{m+k} \Rightarrow P(H_б^n) = \frac{m}{m+k}$$

Зад Кутия съдържа n билета, от които m са печеливши. По случаен начин и подред се теглят по един билет. Кога е най-изгодно да се изтегли билет

Реш

Нека m - печеливши = 1, n-m - губещи = 0

$\underbrace{|1|1|0|1|0| \dots |1|}_{n-1}$ $\binom{n}{m}$

$$P(A_1) = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}} = \frac{1}{\frac{n}{m}} = \frac{m}{n}$$

Зад Петнадесет изпитни билета съдържат по два въпроса. Студент може да отговори на 25 въпроса. Каква е вероятността той да вземе изпита, ако за това е нужно да отговори на двата въпроса в един билет или на един от двата въпроса, а след това и на посочен въпрос от друг билет

Реш. 25-знаещи 5-незнаещи

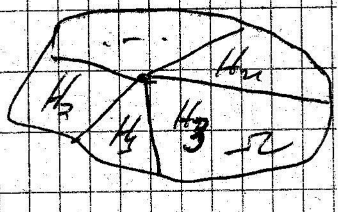
$H_0 = \{≡\}$, $H_1 = \{−\}$, $H_2 = \{☺\}$

$$P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + \overset{1}{P(A|H_2)}P(H_2)$$

$$P(H_2) = \frac{\binom{25}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{20}{29}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{25}{1}\binom{5}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{25}{3\cdot 29}, \quad P(H_0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{30}{2}}$$

$$P(A|H_1) = \frac{24}{28}, \Rightarrow \frac{24}{28}\cdot\frac{25}{3\cdot 29} + 1\cdot\frac{20}{29}$$

Ф-ла на Бейс



$P(H_k)$ - априорна вероятност - преди

$P(H_k|A)$ - апостериорна вероятност - след

$\sum P(H_k) = 1$

$P(H_k|A)$ - условна ~~вероятност~~ ф-ла на Бейс

$$P(A) = \sum_k P(A|H_k)P(H_k)$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_k P(A|H_k)P(H_k)}$$

Зададени са 10 урни, в девет от тях има по две бели и две черни топки, а в десетата има пет бели и една черна. По случаен начин се избира урна и от нея се тегли топка, която се оказва бяла. Каква е вероятността тази топка да е изтеглена от десетата урна

Реш

$\underset{1}{|2|2|}$ $\underset{2}{|2|2|}$ … $\underset{10}{|5|1|}$

$H_1 = \{$избраната урна е от $1 \div 9\}$

$H_2 = \{$избраната урна е $10\}$

$P(H_1) = \frac{9}{10}$, $P(H_2) = \frac{1}{9}$

$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{6} = \frac{27+5}{60} = \frac{8}{15}$

$P(H_2/A) = \frac{P(A/H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{5/60}{8/15} = \frac{5}{32}$

Зад. Дадени са три ~~жетона~~ жетона. Първият има две бели страни, вторият две черни, а третият една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира жетон и се хвърля върху маса. Ако горната страна на жетона е бяла, каква е вероятността другата му страна, която не се вижда, също да е бяла

Реш

H_1 H_3 H_2 , $A = \{$горна страна е бяла$\}$

$P(A) = \underbrace{P(A/H_1)}_{0}\underbrace{P(H_1)}_{1/3} + \underbrace{P(A/H_2)}_{1}\underbrace{P(H_2)}_{1/3} + \underbrace{P(A/H_3)}_{1/2}\underbrace{P(H_3)}_{1/3} =$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$P(H_2/A) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$