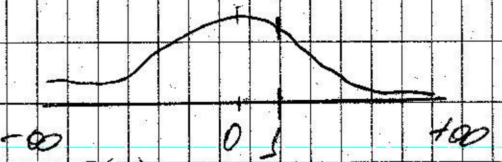
ТВ 20.05.15

Непрекъсната случайна величина

$\xi: \Omega \to x \in \mathbb{R}$



$F_\xi(x) = P(\xi < x)$

$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = P(x_1 < \xi < x_2) \xrightarrow[x_2 - x_1 \to 0]{} \frac{F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)}{x_2 - x_1} \xrightarrow[x_2 \to x_1]{} F_\xi'(x_1) =$

$= f_\xi(x_1)$ - плътност, $F_\xi(-\infty) = 0$, $F_\xi(\infty) = 1$

$F_\xi(x)$ е растяща ф-я - непрекъсната отляво

$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} dF_\xi(x) = F_\xi(\infty) - F_\xi(-\infty) = 1$

$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$, $D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - (E\xi)^2$

Зад. Случайна величина ξ има плътност $f(x) = kx(1-x^2)$ за $x \in [0,1]$. Да се пресметне вероятността ξ да бъде по-малка от средната си стойност.

$f(x) = \begin{cases} kx(1-x^2), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$ Реш.

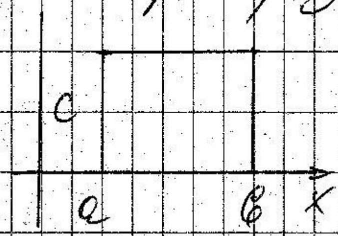
$\int_0^1 f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 kx(1-x^2)dx = k\int_0^1 (x - x^3)dx = k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = k\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow k = 4$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$

$E\xi = \int_0^1 x\, 4x(1-x^2)dx = 4\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}$

$P\left(x < \frac{8}{15}\right) = F_\xi\left(\frac{8}{15}\right) = \int_0^{8/15} 4x(1-x^2)dx = 4\int_0^{8/15}(x - x^3)dx = 4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{225} - \frac{1}{4}\cdot\frac{8^4}{15^4}\right)$

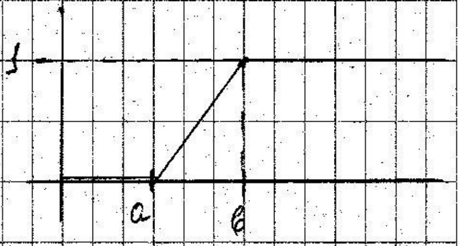
Равномерно разпределение $\quad \xi \in U(a,b)$



$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases} \Rightarrow$$

$$F_\xi(x) = \int \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} + d \,; \quad \int_a^b c\,dx = 1 = c(b-a) \Rightarrow c = \frac{1}{b-a} \text{ т.е.}$$

$$0 = F_\xi(a) = \frac{a}{b-a} + d \Rightarrow d = -\frac{a}{b-a}$$



$$F_\xi(x) = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$E_\xi = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad E_\xi = \frac{a+b}{2}$$

$$D_\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2, \quad E\xi^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3}(b^3-a^3) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\Rightarrow D_\xi = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \;//\; D_\xi$$

Зад. Автобусите пристигат на спирка на всеки 5 минути. Нека ξ е случайна величина - време на чакане на автобуса на спирката. Да се намери средното време на чакане, дисперсията на времето на чакане, функцията на разпределение на ξ и вероятността да чакаме повече от 3 минути на спирката.

Реш. $\xi \in U(0,5)$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x}{5}, & x\in[0,5] \\ 1, & x>5 \end{cases}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x\notin[0,5] \\ \frac{1}{5}, & x\in[0,5] \end{cases} \text{ производна}$$

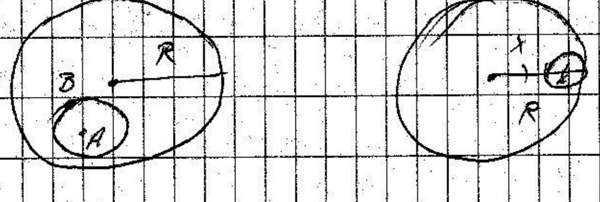
$$E\xi = \frac{5}{2}, \quad D\xi = \frac{25}{12}$$

$$P(\xi>3) = \int_3^5 \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}(5-3) = \frac{2}{5}$$

$$\| \quad 1 - F_\xi(3) = 1 - P(\xi \le 3) = 1 - \frac{3}{5} = 2/5$$

Зад. Във вътрешността на кръг с радиус R, случайно се избират точките A и B. Да се намери вероятността окръжността с център A и радиус AB да лежи във вътрешността на кръга.

Реш.



$$P(\xi = x) = ?, \quad F_\xi(x) = P(\xi < x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2} \quad x\in[0,R]$$

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2x}{R^2}, & x\in[0,R] \\ 0, & x\in[0,R] \end{cases}$$

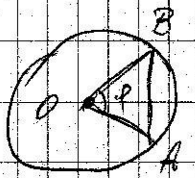
$$\int_0^R P(AB < R-x \,/\, OA = x) f_\xi(x)dx = \int_0^R \frac{\pi(R-x)^2}{\pi R^2}\frac{2x}{R^2}dx =$$

$$\frac{2}{R^4}\int_0^R x(R-x)^2 dx = 1/16$$

③

Зад. Върху окръжност $k(O,r)$ е фиксирана точка A. Точка B попада по случаен начин върху окръжността. Да се намери математическото очакване на лицето на триъгълника AOB

Реш.



$$S_{\Delta AOB} = r^2 \sin\varphi$$

$$\varphi_1 \in U(0,\pi), \quad \varphi_2 \in U(0,2\pi)$$

$$f_{\varphi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x\notin[0,\pi] \\ \frac{1}{\pi}, & x\in[0,\pi] \end{cases}, \quad f_{\varphi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x\notin[0,2\pi] \\ \frac{1}{2\pi}, & x\in[0,2\pi] \end{cases}$$

$$E S_{\Delta AOB} = E(r^2 \sin\varphi_1) = \int_0^{\pi} r^2 \sin \cancel{x}\, \frac{1}{\pi}\,dx = \frac{r^2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx =$$

$$= -\frac{r^2}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = -\frac{r^2}{\pi}(-1-1) = \frac{2r^2}{\pi}; \quad Eg(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_{\varphi}(x)\,dx$$

Експоненциално разпределена случайна величина

$$\xi \in Ex(\lambda), \quad f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}, \quad E\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$