ТВ 16.04.15

Дискретни случайни величини

$\xi : \Omega \to X$ — изброимо мн-во

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k	...
P	p_1	p_2	p_3	...	p_k	...

$\sum p_k = 1$

$$E\xi = \sum p_k x_k, \quad D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$Eg(\xi) = \sum_k g(x_k) p_k$$

! $\xi \in Bi(n,p)$, ξ — брой на "успехите" в n независими опита с вероятност за успех p във всеки опит

ξ	0	...	n
P	p_0	...	p_n

$$p_k = P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q = 1-p$$

$$E\xi = np, \quad D\xi = npq$$

$\xi \in Ge_0(P)$,

ξ	0	1	...	k	...
P	p	qp	...	$q^k p$	...

~~[illegible]~~ ξ — брой на неуспешните опити до първият успех в серия от независими опити с вероятност за успех p

$$E\xi = \frac{q}{p}, \quad D\xi = \frac{q}{p^2}$$

$\eta \in Ge_1(P)$ — брой опити до първи успех

η	1	2	...	k	...
P	p	qp	...	$q^{k-1}p$	...

$$E\eta = \frac{1}{p}, \quad D\eta = \frac{q}{p^2}$$

$\xi \in Po(\lambda)$ $\lambda > 0$

$P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2 \ldots$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = \sum \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$

$E\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$

Приближение на Моавър $\Rightarrow \eta \in Bi(n, p)$ $\left.\begin{matrix} n \to \infty \\ p \to 0 \\ np \to \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \xi \approx \eta$

Зад В даден факултет има 500 студента. Каква е вероятността 22 април да е рожден ден на k студента от този факултет? Намерете средния брой на студентите, които са родени на 22 април

Реш

$\xi \in Bi(500, 1/365)$, $E\xi = \dfrac{500}{365}$

$P(\xi = k) = \binom{500}{k} \left(\dfrac{1}{365}\right)^k \left(\dfrac{364}{365}\right)^{500-k}$ Тогава ва

$\eta \in Po\left(\dfrac{500}{365}\right)$, $P(\eta = k) = \dfrac{(500/365)^k e^{-500/365}}{k!}$

Зад От урна, съдържаща 5 бели и 3 черни топки се избират последователно една по една топки, докато се появи бяла. Намерете разпределението на случайната величина „брой на изтеглените черни топки" и пресметнете математическото очакване и дисперсията ѝ, ако изваждата е:

а) без връщане

ξ	0	1	2	3
P	P_0	P_1	P_2	P_3

$E\xi = 0 \cdot \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{5}{7} + 2 \cdot \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{5}{6 \cdot 5} + 3 \cdot \dfrac{3 \cdot 2 \cdot}{6 \cdot 7 \cdot 8}$

$P_0 = \dfrac{5}{8}$, $P_1 = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{5}{7}$, $P_2 = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{5}$, $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

б) с връщане

$\xi \in Geo\left(\frac{5}{8}\right)$, $E\xi = \frac{q}{p} = \frac{3/8}{5/8} = 3/5$

$D\xi = \frac{q}{p^2} = \frac{3/8}{25/64} = \frac{24}{25}$

Зад. В кутия има 7 лампи, от които 3 са дефектни. По случаен начин се избират за проверка 4 лампи. Да се намери разпределението на случайната величина - „брой на изпробваните качествени лампи" - и да се пресметне нейното математическо очакване.

Реш.

$\xi \in HG(7, 4, 4)$

$P(\xi = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{7-4}{4-k}}{\binom{7}{4}}$ $k = 1..4$, $E\xi = \frac{4}{7} \cdot 4 = \frac{16}{7}$

Зад. Книга от 500 страници съдържа 50 печатни грешки. Всяка грешка може да се срещне на коя да е страница с една и съща вероятност. Като се използва Поасоново приближение да се определи вероятността избрана страница да съдържа не по-малко от 3 грешки.

Реш. ξ - брой на грешките на първа страница

$\xi \in Bi(50, 1/500)$ $E\xi = 1/10$

$\xi \in Po(50, 1/500)$ т.е. $\xi \in Po(1/10)$

$P(\xi < 3) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) =$

$= \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^0 e^{-1/10}}{0!} + \frac{(1/10)^1 e^{-1/10}}{1!} + \frac{(1/10)^2 e^{-1/10}}{2!} = e^{-1/10}\left(1 + 1/10 + 1/200\right) =$

$\frac{221 \cdot e^{-1/10}}{200}$

Зад. Двама ловци преследват заек. Първият улучва с вероятност 0.2, а вторият с 0,3. Ловците стрелят едновременно и ако никой не улучи, стрелят отново. Да се пресметне вероятността първият ловец да убие заека. Какъв е средният брой изстрели необходими за убиването на заека?

Реш.

$$P_1 = 2/10, \quad P_2 = 3/10$$

P_A - първият ловец убива заека

P_B - вторият ловец убива заека

$$P_A = \frac{2}{10} + \underbrace{\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}}_{\text{не го улучва}}\cdot P_A \Rightarrow 100P_A = 20 + 56P_A \Rightarrow P_A = \frac{20}{44} = \frac{5}{11}$$

$$P_B = \frac{30}{44} = \frac{15}{22}$$

η - брой изстрели необходими за убиването на заека

$A = \{$първи ловец на първи опит$\}$, $B = \{$втори ловец на първи опит$\}$

$$\begin{array}{c|cccc} \eta & 1 & 2 & \dots & k \\ \hline & \frac{44}{100} & \frac{56}{100}\frac{44}{100} & & \left(\frac{56}{100}\right)^{k-1}\frac{44}{100} \end{array}, \quad \text{т.е. } \eta \in Ge_1\left(\frac{44}{100}\right)$$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B) - P(AB) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10}\frac{3}{10} = \frac{5}{10} - \frac{6}{100} = \frac{44}{100}$$

$$E\eta = \frac{1}{\frac{44}{100}} = \frac{25}{11}$$

Зад. Продадени са 4 случайно избрани от един тип изделия. Известно е, че при този тип изделия 10% са дефектни. Нека η е броят на всички дефектни изделия измежду четирите продадени. Цената ζ за поправка на дефектните изделия зависи от броя им по следният начин: $\$: \zeta = 3\eta^2 + \eta + 2$

Намерете средната цена, необходима за поправката на дефектните изделия

Реш.

$$E\eta = E(3\xi^2+\xi+2) = 3E\xi^2 + E\xi + 2$$

ξ - брой на дефектните изделия

$\xi \in Bi(4, 1/10)$ (10%), $E\xi = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $D\xi = \frac{4}{10}\cdot\frac{9}{10} = \frac{36}{100}$

$E\xi^2 = \frac{52}{100} = \frac{13}{25} \Rightarrow 3\cdot\frac{13}{25} + 2/5 + 2 = \frac{99}{25} = E\eta$

Зад. От числата $\{1, 2 \ldots 10\}$ по случаен начин се избират три числа без връщане. Нека ξ е случайна величина - средното по големина число от избраните три. Да се намери разпределението на ξ, $E\xi$ и да се пресметнат вероятностите на събитията:

а) $A = \{\xi \geq 7\}$, б) $B = \{3 \leq \xi < 7\}$, в) $C = \{|\xi - 2| < 2\}$

Реш.

$P(\xi=2) = \frac{1\cdot 8}{\binom{10}{3}}$, $P(\xi=3) = \frac{2\cdot 7}{\binom{10}{3}}$, $P(\xi=k) = \frac{(k-1)(10-k)}{\binom{10}{3}}$, $k = 2 \ldots 9$

$$E\xi = \sum_{k=2}^{9} \frac{k(k-1)(10-k)}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}\sum_{k=2}^{9} \frac{11k^2 - k^3 - 10k}{1} =$$

$$\frac{1}{120}\left(-10\sum_{k=2}^{9} k + 11\sum_{k=2}^{9} k^2 - \sum_{k=2}^{9} k^3\right)$$

(5)