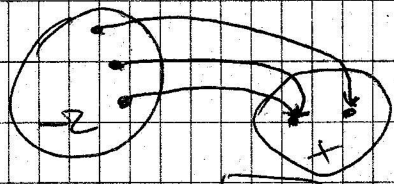
ТВ 15.04.15

Случайна величина $\xi: \Omega \to X$ - число

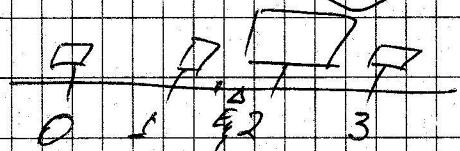
Ако X е изброимо множество $\Rightarrow \xi$ - дискретна случайна величина

$$\begin{array}{c|ccccc} \xi & x_1 & \dots & x_k & \dots \\ \hline P & p_1 & \dots & p_k & \dots \end{array} \qquad x_k \in X, \quad \sum_k p_k = 1$$



Очакване $E\xi = \sum_k p_k x_k$

Дисперсия $D_\xi = \sum_k p_k (x_k - E\xi)^2$



$\sqrt{D_\xi}$ - стандартно отклонение

Зад Игра се провежда при следните условия. Играчът залага 5 лева и има право да хвърли два зара. Ако хвърли две шестици печели 100 лева, а ако хвърли една шестица печели 5 лева. Да се пресметне математическото очакване на печалбата на играча. Справедлива ли е играта?

Нека ξ - печалба на играча

$$\begin{array}{c|ccc} \xi & -5 & 0 & 95 \\ \hline P & \frac{25}{36} & \frac{10}{36} & \frac{1}{36} \end{array} \qquad E\xi = (-5)\frac{25}{36} + \frac{95}{36} = \frac{-125+95}{36} = -\frac{5}{6}$$

Играта не е справедлива (търсим около 0)

Зад Правилна монета се хвърля три пъти. Случайната величина ξ представлява броят на падналите се гербове. Да се намери законът на разпределение на дадената случайна величина, да се намери функцията на разпределение и числовите характеристики $E\xi$ и $D\xi$

Реш

ξ	0	1	2	3
P	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$

ГХЛ
ЛГЛ
ЛЛГ

$n \to$ незав. еднакви опита
p - вероятност за успех във всеки опит
ξ - броят на успехите в n-те опита

ξ	0	1	…	n
P	p_0	p_1		p_n

$$P_0 = (1-p)^n, \quad p_n = p^n$$
$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Биномно разпределение

$\xi \in Bi(3, 1/2)$

$$E\xi = 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/8 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$
$$D\xi = E[(\xi - E\xi)^2] = E\xi^2 - (E\xi)^2$$
$$E\xi^2 = \sum_k p_k x_k^2, \quad Eg(\xi) = \sum_k p_k g(x_k)$$
$$E\xi^2 = 0^2 \cdot 1/8 + 1^2 \cdot 3/8 + 2^2 \cdot 3/8 + 3^2 \cdot 1/8 = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow$$
$$D\xi = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Зад Нека ξ е случайна величина с разпределение

ξ	1	2	3	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

. Намерете $E\xi$, $D\xi$, $E(\xi^2 - 1)$, $E\frac{1}{\xi}$

Реш

$$E\xi = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 2$$
$$D\xi = (1-2)^2 \frac{4}{10} + (2-2)^2 \frac{3}{10} + (3-2)^2 \frac{2}{10} + (4-2)^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \underline{1}$$
$$E(\xi^2 - 1) = E\xi^2 - E1 \Rightarrow D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 \text{ т.е. } E\xi^2 = D\xi + (E\xi)^2 \Rightarrow$$
$$E\xi^2 = 1 + 2^2 = 5 \Rightarrow \quad E(\xi^2 - 1) = 5 - 1 = 4$$
$$E1/\xi = \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{48+18+8+3}{120} = \frac{77}{120}$$

Зад Разглеждаме случайната величина ξ, за която
3) $P(\xi=j)=\frac{c}{3^j}$; $j=0,1,2\ldots$ Да се намери
константата c, $P(\xi\geq 10)$ и вероятността ξ да
приеме нечетни стойности

Реш.

ξ	0	1	2	3	...	k	...
	$\frac{c}{3^0}$	$\frac{c}{3^1}$	$\frac{c}{3^2}$	$\frac{c}{3^3}$	...	$\frac{c}{3^k}$	...

$c=?$

$$\frac{c}{3^0}+\frac{c}{3^1}+\ldots+\frac{c}{3^k}+\ldots=c\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)=c\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=c\cdot$$

$\Rightarrow c=\frac{2}{3}\Rightarrow$

ξ	0	1	2	...	k	...
	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	...	$\frac{2}{3^{k+1}}$	

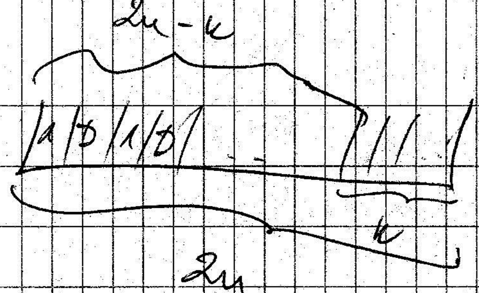
$$P(\xi\geq 10)=\left(\frac{2}{3^{11}}+\frac{2}{3^{12}}+\ldots\right)=\frac{2}{3^{11}}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$$

$$P(\xi-\text{нечетно})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{3^{2k+2}}=\frac{2}{3^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3^2)^k}=\frac{2}{3^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3^2}\cdot\frac{9}{8}=\frac{1}{4}$$

Зад Пушач носи в джоба си две кутии кибрит. Всеки път
когато иска да запали, той избира произволна кутия
и изважда една клечка. След известно време той
забелязва, че едната кутия е празна. Каква е
вероятността в този момент в другата кутия
да са останали точно k клечки, ако първоначал-
но във всяка кутия е имало по n клечки.

Реш.

4)



$$2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

избира лява — избира дясна

$$=\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Зад. Студент чака своята приятелка, която закъснява. За да разнообрази чакането, той решава да се поразходи като хвърля монета и ако се падне герб прави десет крачки в едната посока, а ако се падне ези - десет крачки в противоположната посока. На новото място повтаря тази операция и т.н. Каква е вероятността след сто хвърляния крачки студентът да се намира:

а) на мястото откъдето е тръгнал

б) на разстояние 20, 50 крачки от мястото на срещата

Реш.

ξ - броят на опитите, в които студентът върви наляво

$\xi \in Bi(10, \frac{1}{2})$, $-\xi \cdot 10 + (10-\xi) = 100-20\xi$. Искаме

$100-20\xi = 0 \Rightarrow \xi = 5$; $\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$100-20\xi = 20 \Rightarrow \xi = 6$ / 20 крачки наляво

$100-20\xi = -20 \Rightarrow \xi = 4$ / 20 крачки надясно

$100-20\xi = 50 \Rightarrow \xi = \frac{5}{2} \Rightarrow \xi = \emptyset$

не може да е на нечетен брой стъпки

в смисъл 50 стъпки

Зад. Еднотипни прибори се изпробват при натоварен режим. Вероятността произволен прибор да премине изпитанието е 0,8. Изпитанията се прекратяват след първото откриване на прибор, излязъл извън строя. Ако ξ е случайна величина - брой на ~~[illegible]~~ тестваните прибори преди първия открит неизправен прибор, намерете закона на разпределение на ξ, $E\xi$, $D\xi$

Реш.

$$P = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

ξ	1	2	3	...	k
P	$1/5$	$1/5 \cdot 4/5$	$1/5 (4/5)^2$	...	$1/5 (4/5)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{k} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$$

$\xi \in Ge(p)$

ξ	1	2	3	...	k
P	p	qp	q^2p		$q^{k-1}p$

$$E\xi = \frac{1}{p}, \quad D\xi = \frac{q}{p^2}$$

т.е.

$$E\xi = \frac{1}{1/5} = 5, \quad D\xi = \frac{(4/5)}{(1/5)^2} = \frac{4}{5} \cdot 25 = 20$$