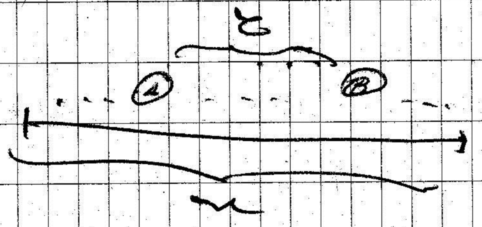
ТВ 11.03.15

Зад. Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има r човека

$$\frac{(n-2)!\,2(n-r-1)}{n!}$$



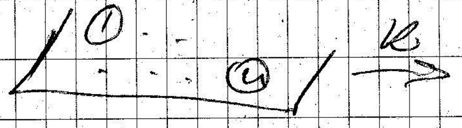
Зад. Група от n човека се нарежда около кръгла маса. Каква е вероятността две фиксирани лица да се окажат едно до друго

$$\frac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{(n-1)} \quad \text{за } n \geq 3$$

(уса няма първи)

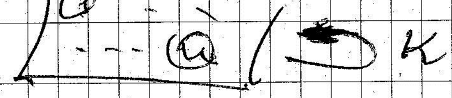
Зад. От урна която съдържа топки с номера $1, 2 \ldots n$, k пъти последователно се вади по една топка. Да се пресметне вероятността, номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако:

а) извадката е без връщане



$$\frac{C_n^k = \binom{n}{k}}{V_n^k}$$

б) извадката е с връщане



$$\frac{\tilde{C}_n^k}{\tilde{V}_n^k}$$

Действия със събития

Зад. Вероятността стрелец да улучи мишена е 2/3, ако улучи той получава право на втори изстрел. Вероятността за улучване на [redacted] двете мишени е 1/2. Каква е вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелецът е получил право да стреля втори път

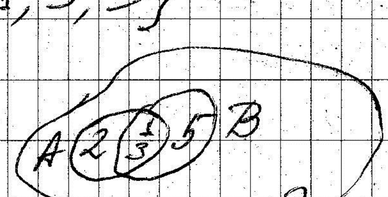
Предусловия

$\Omega = \{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n\}$ където ω_i са елементарни събития и $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$ за равностойни ω_i

Събитието е мн-во от елементи на Ω т.е. $A \subseteq 2^{\Omega}$.

Условна вероятност $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\#AB/n}{\#B/n}$
(да се изпълни A при условие B)

Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$



Обединение на две събития

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \overbrace{P(A \cap B)}^{= P(AB)}$

Независими събития

$P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow$ A и B са независими (II)

Реш: $A = \{$ успява да уцели първата мишена $\}$
$B = \{$ успява да уцели втората мишена $\}$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(AB) = 1/2, \quad P(A) = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$P(A/B) = \frac{1/2}{2/3} = 3/4$$

Зад Да се определи вероятността, случайно избрано естествено число да не се дели:

а) нито на две нито на три

$A = \{$ не се дели на 2 $\}$, $B = \{$ не се дели на 3 $\}$

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1/3$$

$\frac{2}{3}$ - само две числа от три поредни не се делят на три

б) на две или на три

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 5/6$$

Зад В урна има една бяла и една черна топка. На всеки ход от урната се вади една топка. Ако извадената топка е бяла, тя се връща обратно в урната и се добавят още две бели топки. Каква е вероятността при първите 50 опита да не бъде извадена черната топка

③

Др| $P(A_1 A_2 \dots A_n) = \underbrace{\underbrace{P(A_1)P(A_2|A_1)}_{P(A_1A_2)}P(A_3|A_2A_1)}_{P(A_1A_2A_3)} \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$

Нека $A_1 = \{$на първия ~~път~~ вади бяла$\}$

$A_2 = \{$на втория път вади бяла$\}$ ...

$P(A_1A_2 \dots A_{50}) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_{50}|A_1 \dots A_{49})$

$P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2|A_1) = 3/4$, $P(A_3|A_1A_2) = 5/6$

$P(A_k|A_1 \dots A_{k-1}) = \frac{2(k-1)+1}{2+2(k-1)} \Rightarrow$ $k=1..50$

$P(A_1 \dots A_{50}) = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6} \dots \frac{99}{100} = \frac{99!!}{100!!}$ където

$(2k+1)!! = 1.3 \dots 2k+1$, $(2k)!! = 2.4 \dots 2k$

Зад Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин така че вероятността рождените дни на поне двама от тях да съвпадат да е по-голяма от 1/2

$A_n = \{$поне 2-ма са родени на една и съща дата$\}$

$P(\overline{A_n}) = \frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365} \dots \frac{(366-n)}{365} = \frac{365!}{(366-n-1)!} / 365^n$

$= \frac{V_{365}^n}{\tilde{V}_{365}^n}$, $P(A_n) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!\,365^n} \overset{?}{\geq} 1/2$ т.е.

$$\frac{365!}{(365-n)!\,365^n} < \frac{1}{2} \qquad (n = 23 \text{ не го сметнахме})$$

Зад. Двама играчи последователно хвърлят монета. Играта печели този, който пръв хвърли герб (тура). Да се намери вероятността за спечелване на играта за всеки от двамата играчи.

Нека $A_i = \{$първи играч на i-то хвърляне е тура$\}$, $B_i = \{$втори играч на i-то хвърляне — тура$\}$
$i = 1 \,..\, \infty$

$$P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{2}$$

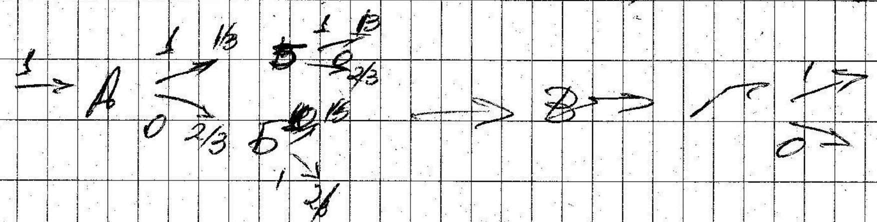
$$P(A_1 \cup \bar{A}_1\bar{B}_1A_2 \cup \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3 \ldots) = P(A_1) + P(\bar{A}_1\bar{B}_1A_2) + \ldots =$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Зад. А получава информация и я предава на Б, той я предава на В, той пък на Г. Г съобщава получената информация. Известно е, че всеки от тях казва истината само в един от три случая. Каква е вероятността първият А да не е излъгал, ако е известно, че последният Г е съобщил истината.

1 - истина , 0 - ложь



$A = \{$А назвал истинное$\}$, $B = \{$Б назвал истинное$\}$

$C = \{$В назвал истинное$\}$; $D = \{$Г назвал истинное$\}$

$$P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)}$$

$$P(D) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{81} + \frac{16}{81} + \frac{6\cdot 4}{81} = \frac{41}{81}$$

$$P(AD) = P(D|A)P(A) \Rightarrow P(A) = 1/3$$

$$P(D|A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{27} \Rightarrow$$

$$P(D|A)P(A) = \frac{13}{27}\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{81} \Rightarrow$$

$$P(A|D) = \frac{13/81}{41/81} = \frac{13}{41}$$