МО 31.03.15

Симплекс метод

$\min z = c^T x \qquad x = (x_B, x_N)$

$Ax = b$

$x \geq 0$

$z = \bar{c}_0 + \bar{c}_N^T x_N$

$x_B + \bar{N} x_N = \bar{b} \Rightarrow \omega_x = \bar{b}$

$x \geq 0$

базисно представяне

Алгоритъм

Ст0 Имаме начален връх $\bar{x} = \omega_x = \bar{b} \Rightarrow$ (изключваме базисните и стигаме до представяне само с небазисните) $z = \bar{c}_0 + \bar{c}_N^T x_N$

Ст1 Проверка на критериите на симплекс метода

а) Проверка на критерий за оптималност

$\forall \bar{c}_j \geq 0 \ (\bar{c}_N \geq 0) \Rightarrow$ оптималност $\Rightarrow$ край

б) Проверка на критерий за неограниченост на целевата функция

$\exists \bar{c}_j < 0, \ \omega_j \leq 0 \Rightarrow \min z = -\infty \Rightarrow$ край

в) $\forall \bar{c}_j < 0, \ \omega_j \neq 0 \ (\exists \omega_j > 0) \Rightarrow$ Ст2

Ст2 Преминаваме към ново базисно състояние на задачата

а) Избор на нова базисна променлива

$x_q: \bar{c}_q < 0 \ (\min \bar{c}_j = \bar{c}_q)$, ω_q - водещ стълб

(Незадължително правило: ако имаме няколко < 0, избираме най-малкото)

б) Определяне на променлива x_{B_p} която да излезе от базиса, т.е.

$$x_{B_p}: \frac{\bar{x}_B}{\omega_{pq}} = \min_{i: \omega_{iq} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\omega_{iq}}$$

в) решаваме задачата с новият базис x_q

г) изключване на x_q от целевата функция $\Rightarrow$ Ст1

Зад. $\max z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \Rightarrow \min(-z) = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 2$$

водещ стълб

само „+"

$\bar{x} = (0,0,1,1,2)$

$x_B = (x_3\ x_4\ x_5)$

$x_N = (x_1\ x_2)$

$\min z = -3 - 6x_1 + 7x_2$

$z(\bar{x}) = -3$

$-3x_3 = -3 - 3x_1 + 3x_2$
$2x_4 = 2 - 2x_1 + 2x_2$
$-x_5 = -2 + x_1 + x_2$
$-2x_1 = -2x_1$
$x_2 = x_2$
$-3 - 6x_1 + 7x_2$

$\bar{c}_1 = -6 < 0 \Rightarrow$ не е изпълнен критерий 1

гледаме коефициента пред x_1

не е изпълнен критерий 2 $\Rightarrow$ Ст2

$\bar{x} \to x^1$, $x_1 \in X_B(x^1)$

$\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right)$ – отношенията на кр. ст-ти към коефициента пред x_1

по-малко

$x_1 \in x_B(x^1)$, $x_4 \notin x_B(x^1) \Rightarrow x_B(x^1) = (x_3, x_1, x_5)$

$$+x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 1$$
$$2x_2 - x_4 + x_5 = 1$$

$x^1 = (1,0,2,0,1) = x^{opt}$

$z = -9 + x_2 + 6x_4$

$\bar{c}_2 = 1 > 0$, $c_4 = 6 > 0$

$\min(z) = -9$

$\max z = -\min(-z) = 9$

$-6x_1 = -6x_1 + 6x_4 - 6$
$7x_2 = 7x_2$
$-3 = -3$
$x_2 + 6x_4 - 9$

Зад. $\max z = 3x_1 + x_2 \Rightarrow \min(-z) = -3x_1 - x_2$

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \ge -2 \ /\cdot(-1) \\ 3x_1 + x_2 \le 22 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 + x_2 \le 22 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

$\min z_н = -3x_1 - x_2$ – канонічне представлення

$-2x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$x_1 - x_2 + x_4 = 2$

$3x_1 + x_2 + x_5 = 22$

$\forall x_j \geq 0$

$\bar{x} = (0,0,4,2,22)$

$z_н(\bar{x}) = 0$

$\min\left(\frac{2}{1}, \frac{22}{3}\right)$?

$\bar{x} \to x'$

$x_4 \notin x_B(x')$ $\quad x_1 \in x_B(x')$ $\Rightarrow x_B(x') = (x_1, x_3, x_5)$

$z = -6 - 4x_2 + 3x_4$ → незна опт реш

$-x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$

$x_1 - x_2 + x_4 = 2$

$4x_2 - 3x_4 + x_5 = 16$

$\to (:2)$

$x' = (2,0,8,0,16)$

$x^*_\lambda = \lambda(6,4) + (1-\lambda)x''', \lambda \in [0,1]$

$x''' - x''$ – базисен

$x^* = (6,4)$

$x^{опт}_{\mu} = x'' = (6,4,12,0,0)$

$x' \to x''$

$x_2 \in x_B(x')$, $x_5 \notin x_B(x'') \Rightarrow x_B(x'') = (x_1, x_2, x_3)$

$z = -22 + x_5 \to$ опт

$x_3 + \frac{5}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 = 12$

$x_1 \quad \frac{7}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 = 6$

$x_2 \quad -\frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 = 4$

ограничен р-б

Зад $\max z = 3x_3 + 4x_4 \Rightarrow \min(-z) = -3x_3 - 4x_4$

$0 < 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$

$-5x_1 + 2x_2 + x_4 = 1$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

$\Rightarrow x_2 \in x_B(x')$

$\bar{x} = (0,0,1,1)$ – недоп.

$x_B = (x_3\ x_4)$

$x_N = (x_1\ x_2)$

$z = -7 - 14x_1 - x_2$

$-3x_3 = -3 + 6x_1 - 9x_2$

$-5x_4 = -4 - 20x_1 - 8x_2$

$\bar{x} \to x'$; $x_1 \in x_B(x')$, $x_3 \notin x_B(x') \Rightarrow x_B(x') = (x_1, x_4)$

3

$z = -14 - 22x_2 + 7x_3$

$x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}$

$\frac{11}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + x_4 = \frac{7}{2}$ $\qquad x' = (1/2, 0, 0, 7/2)$

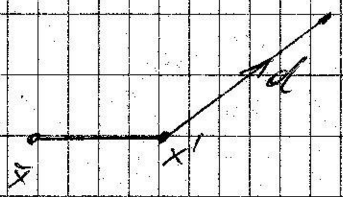
$z = -14 - 22x_2 + 7x_3$ $\qquad x_1 = -7x_2 + 7x_3 + 7$

$-4x_2 \qquad -7$

$\cancel{= 20x_2 + 4x_3}$

$\min(z) = -\infty$, $\max z = \infty$

$d = (3/2, 1, 0, 11/2)$



$z(x' + td) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{t > 0} \infty$