МО 24.03.15

Симплекс метод

$\min z = c^t x$, $P: \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

$c, x \in R^n$ $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix}$, $A = \begin{array}{c} [B \; N] \\ x_B \; x_N \end{array}$

$A: m \times n$, $b \in R^m$ $\quad x = (x_B \; x_N)$

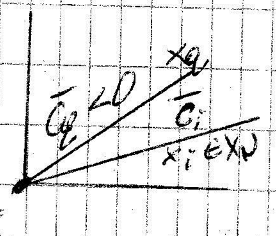
$Ax = b$, $B^{-1} \mid Bx_B + Nx_N = b$

$P: [x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \geq 0, \; x \geq 0]$,

$z = c^t x = c_B^t x_B + c_N^t x_N = c_0 + \bar{c}_N^t x_N$, понеже

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

Базисен вид на задачата



$\bar{c}_i x_i$, където $\bar{c}_i$ - относителна оценка

$\bar{c}_i > 0 \Rightarrow z \uparrow$, $\bar{c}_i < 0 \Rightarrow z \downarrow$

$\bar{c}_i = 0 \Rightarrow z$

$\forall \bar{c}_i \geq 0 \; (\bar{c}_N \geq 0) \Rightarrow \bar{x}$ е оптимално решение

$\bar{x} = x^{опт}$ - критерий за оптималност

при $\bar{c}_i < 0$ $\; z \downarrow \Rightarrow \exists x_q \in x_N, \bar{c}_q, w_q \leq 0 \Rightarrow$

$\min z = -\infty$ - критерий за неограниченост

Нека $w_j = B^{-1}A_j \leq 0 \Rightarrow$ неограничен

Зад. $\min z = -2x_1 + 3x_3 - 5x_4 + 3x_5$

$P: \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 10x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ \forall x_i \geq 0 \end{cases}$

$x' = (4,0,0,0,2)$ $\quad x'' = (0,2,0,0,0)$

неизроден $\quad$ изроден

Да се приведе в базисен вид спрямо базисите на x^1 и x^4 и да се провери дали са оптимални решения. Да се измерва повишението на целевата ф-я от ръбовете на x^1 и x^4

x^1, $B = [A_1, A_5]$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2, \ \forall x_i \geq 0 \end{cases}$

$x_B = (x_1, x_5)$

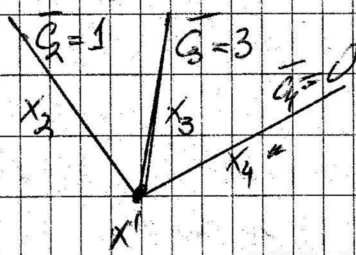
$z = x_2, x_3, x_4$, от първото у-е $\Rightarrow$

$x_1 = -2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 4$, а от второто у-е $\Rightarrow$

$x_5 = 2 - x_2 + 2x_3 - 3x_4$

$\Rightarrow z = 4x_2 - 6x_3 + 14x_4 - 8 + 3x_3 - 5x_4 + 6 - 3x_2 - 6x_3 - 9x_4$

$= -2 + x_2 + 3x_3$



$\min z = z(x^1) = -2$

ръбът на x_2 – ограничен (+ кори)

ръбът на x_3 – неограничен (– кори)

ръбът на x_4 – ограничен

$d_2 = (-2, 1, 0, 0, -1)$ $\quad x(t) = x^1 + t d_2 = \begin{cases} 4 - 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{cases}$

$x(2) = (0, 2, 0, 0, 0) = x''$ $\quad 0 \leq t \leq 2$

$d_3 = (3, 0, 1, 0, 2)$ $\quad x(t) = x^1 + t d_3 = \begin{cases} 4 + 3t \\ 0 \\ t \\ 0 \\ 2 \end{cases}$ неограничен

$t \geq 0$

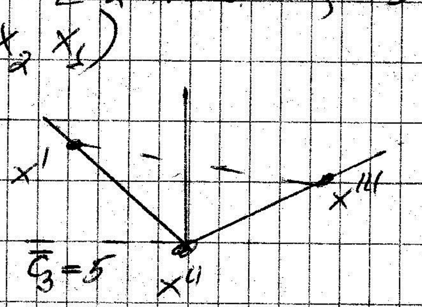
$d_4 = (-7, 0, 0, 1, -3)$ $\quad x(t) = x^1 + t d_4 = \begin{cases} 4 - 7t \\ 0 \\ 0 \\ t \\ 2 - 3t \end{cases}$

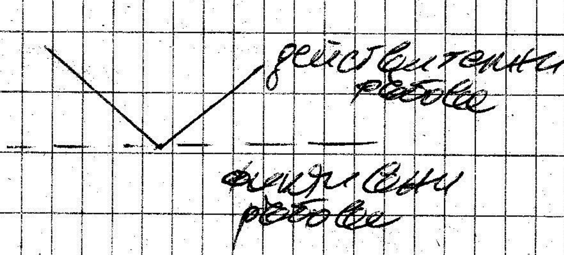
$x''' = (0, 0, 0, \frac{4}{7}, \frac{2}{7})$ – неизроден връх

$x^*_\lambda = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x'''$, $\lambda \in [0, 1]$

$B^{(1)} = [A_2\ A_1]$, $B^{(3)} = [A_2\ A_3]$, $B^{(6)} = [A_2\ A_4]$, $B^{(4)} = [A_2\ A_5]$

$x_B = (x_2\ x_1)$





От $\begin{cases} x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 & \cdot(-2) \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 4 & \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ \forall x_i \ge 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 + 5x_3 - 3x_4 - x_5$

$d_3^{x_3} = (-1, 2, 1, 0, 0)$, $x(t) = x^4 + td_3 = \begin{cases} 1-t \\ 2+2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{cases}$, $t \ge 0$ фиктивен (гаден)

$d_4^{x_4} = (-1, -3, 0, 1, 0)$ $x^4 + td_4 = \begin{cases} 1-t \\ 2-2t \\ 0 \\ t \\ 0 \end{cases}$ фиктивен (гаден)

$\Rightarrow B^{(1)} \Rightarrow B^{(3)}$ при вкарване x_4^t базис. Така действа симплекс метода - минава от един базис в друг.

$d_5^{x_5} = (2, -1, 0, 0, 1)$, $x^4 + td_5 = \begin{cases} 2t \\ 2-t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{cases}$, $2 \ge t \ge 0$ действителен

$x(2) = (4, 0, 0, 0, 2) = x^1$

$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 2 \\ \forall x_i \ge 0 \end{cases} \Rightarrow z = -5x_1 - 8x_4 + 9x_5$ неоптимален връх

$d_1 = (1, -2, -1, 0, 0)$, $x^4 + td_1 = \begin{cases} t \\ 2-2t \\ -t \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ фиктивен, $t=0$

$d_4 = (0, -5, -1, 1, 0)$, $x^4 + td_4 = \begin{cases} 0 \\ 2-5t \\ -t \\ t \\ 0 \end{cases}$ фиктивен

$d_5 = (0, 3, 2, 0, 1)$, $x^4 + td_5 = \begin{cases} 0 \\ 2+3t \\ 2t \\ 0 \\ t \end{cases}$ $t \geq 0$ неограничен

$B^{(3)} = [A_2 A_4]$, $x_B = (x_2 x_4)$

$$\left.\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 5x_3 + 7x_5 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ \forall x_i \geq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow z = 7x_1 + 8x_3 - 7x_5$$

$d_1 = (1, 3, 0, -1, 0)$, $x^4 + td_1 = (t, 2+3t, 0, -t, 0)$ фиктивен

$d_3 = (0, 5, 1, -1, 0)$, $x^4 + td_3 = (0, 2+5t, t, -t, 0)$ фиктивен

$d_5 = (0, -7, 0, 2, 1)$, $x^4 + td_5 = (0, 2-7t, 0, 2t, t)$ действителен

$x\left(\frac{2}{7}\right) = \left(0, 0, 0, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right) = x^{41}$