МО Кръстанов 10.03.15

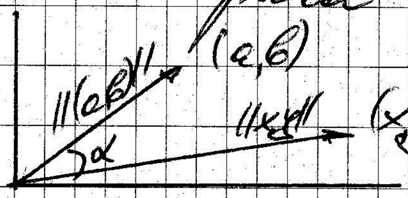
$H = \{x \in R^4 : \langle a, x \rangle = b\}$, $0 \neq a \in R^4$

$P = \{x \in R^4 : Ax = b, \ x_i \geq 0\}$

$a = (a_1, a_2)$; $x = (x_1, x_2)$; $H = a_1 x + a_2 x = b$

$\|(a,b)\| \, \|x_y\| \cos\alpha = \langle (a,b)(x,y) \rangle = ax + by = c$

права , $(a,b) \neq 0$



изпъкнало мн-во

изпъкнало мн-во - през всеки две точки от мн-вото, може да се построи отсечка, която принадлежи на мн-вото

$\overline{x_1 \in R^4 \ni x_2}$, $\lambda \in [0,1]$, $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

отсечка

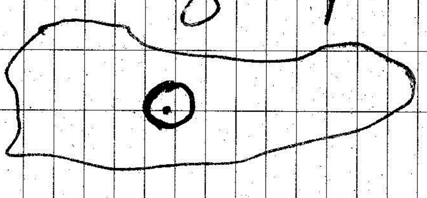
От $H = \{x \in R^4 : \langle a, x \rangle = b\}$

Нека $x_1 \in H \ni x_2$, $\lambda \in [0,1]$

$\langle a, \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \rangle = \lambda \langle a, x_1 \rangle + (1-\lambda) \langle a, x_2 \rangle =$

$\lambda b + (1-\lambda) b = b \Rightarrow$ изпъкнало мн-во

Вътрешна точка - за всяко мн-во може да се намери толкова малка околност на точката, т.с. околността да принадлежи на мн-вото



$x_0 \in H \Leftarrow \{x_n\} \to x_0,\ x_n \in H$

Док.

$\langle a, x_n \rangle = b$. С граничен преход $\Rightarrow \langle a, x_0 \rangle = b$

$H = \{x \in R^n : \langle a, x \rangle = b\}$, $0 \ne a \in R^n$ е неограничено

Док.

Нека $z \ne 0$, $\langle a, z \rangle = 0$, λ - произволно

$$x \in H \Rightarrow \langle a, x + \lambda z \rangle = \underbrace{\langle a, x \rangle}_{b} + \lambda \underbrace{\langle a, z \rangle}_{0} = b$$

Връзка м/у H и $Ф$

Нека $x \in Ф$, $Ax = b$, $x_j \ge 0$, $j = 1, \dots, n$

$(x_1 \dots x_n)^T$, $A_{ij} = (a_{ij})_{m \times n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$b = (b_1 \dots b_m)^T$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \dots x_n \ge 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

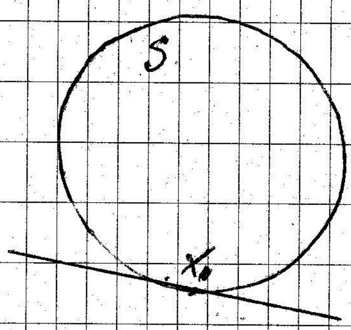
$Ф$ е сечение на H, а H е хиперравнина

$\bar{H} = \{x \in R^n, \langle a, x \rangle \le b\}$ - полуравнина в R^2, полупространство в R^3

$x_1 = \langle (1, 0 \dots 0), (x_1 \dots x_n)^T \rangle \ge 0$

$x_2 = \langle (0, 1, 0 \dots 0), (x_1, \dots, x_n)^T \rangle \ge 0$

$\vdots$



S - изпъкнало и ограничено

$x_0 \in \partial S$

$x_0 \in H = \{x \in R^n : \langle a, x \rangle = b\}$ хиперравнина

$\bar{x} \in S \Rightarrow \langle a, \bar{x} \rangle \le b$

$\bar{x} \in \bar{H} = \{x \in R^n, \langle a, x \rangle \le b\}$

т.е. $S \subseteq \bar{H}$ и се нарича опорна

S принадлежи изцяло на $\bar{H}$; $H \cap S \neq \emptyset \ni \{x_0\}$

Връх на мн-вото S се нарича точка, която е опорна на сечението на хиперравнина с мн-вото

$\bar{x} \in S$, $x_1 \in S \ni x_2$, $\lambda \in (0,1)$, $x_1 \neq x_2$

$\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

екстремна точка е такава точка, която не принадлежи на вътрешността на отсечка от множеството

Док. Допускаме че $\exists$ $x_1 \in S \ni x_2$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0$

$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

$\langle a, x_1 \rangle < b$, $\langle a, x_2 \rangle < b$

$b = \langle a, x_0 \rangle = \langle a, \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \rangle = \lambda \langle a, x_1 \rangle +$
$+ (1-\lambda) \langle a, x_2 \rangle = \lambda b + (1-\lambda) b$

$P = \{x \in R^n : Ax = b, x_j \ge 0, j = 1, .., n\} \ni \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$

Ще считаме че $\bar{x}_1 > 0 .. \bar{x}_p > 0, \bar{x}_{p+1} = 0 .. \bar{x}_n = 0$

$\Rightarrow$ $a_1 .. a_p$, $\varepsilon > 0$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix} = \lambda \neq 0 \quad , (\pm 1)\varepsilon\lambda_1 a_1 + \varepsilon\lambda_2 a_2 \dots + \varepsilon\lambda_p a_p = 0$$

Слагаме ε за да запазиме x_J, $J = 1 \dots p$

$$\bar{x}_J = \frac{1}{2}(\bar{x}_J + \varepsilon\lambda_J) + \frac{1}{2}(\bar{x}_J - \varepsilon\lambda_J), \; J = 1 \dots p$$

$$\bar{x}_J = 0 = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0), \quad J = p+1 \dots n$$

$$x_\varepsilon^1 = \begin{pmatrix}\bar{x}_1 + \varepsilon\lambda_1\\ \vdots\\ \bar{x}_p + \varepsilon\lambda_p\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \quad x_\varepsilon^2 = \begin{pmatrix}\bar{x}_1 - \varepsilon\lambda_1\\ \vdots\\ \bar{x}_p - \varepsilon\lambda_p\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$b = a_1(\bar{x}_1 \pm \varepsilon\lambda_1) + a_2(\bar{x}_2 \pm \varepsilon\lambda_2) + \dots + a_p(\bar{x}_p \pm \varepsilon\lambda_p) \;\; \square$$

Док $\Leftarrow$ Нека $\bar{x}$ не е екстремна

$\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\lambda \in (0,1)$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 \in P \ni x_2$

Ще докажем че стълбовете на A са ЛЗ

$$0 = \bar{x}_J = \lambda x_1^J + (1-\lambda)x_2^J \Leftrightarrow x_1^J = 0, \; x_2^J = 0$$

но $x_1 \neq x_2 \Rightarrow z = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \neq 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} a_1 x_1^1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_p x_1^p &= b \\ a_1 x_2^1 + a_2 x_2^2 + \dots + a_p x_2^p &= b \end{aligned}\right\} \text{ вадим едното от другото} \Rightarrow$$

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_p z_p = 0 \Rightarrow$$

Векторите са ЛЗ. За ЛНЗ $\neq 0$