МЛ Ганчев 29.10.14

(4) $A \simeq \exists x B$. Тогава $A' \simeq \exists y B'_x[y]$ за някой вариант B' на B и променлива y нова за B'. Съгласно индукционното предположение $\vdash_T B \leftrightarrow B'$. Имаме $\vdash_T B' \to B$. Тогава от $\vdash_T B \to \exists x B$ и (П) $\Rightarrow \vdash_T B' \to \exists x B$. Тогава $\vdash_T B'_x[y] \to \exists x B$ (по ПЧС). Оттук $\vdash_T \exists y B'_x[y] \to \exists x B$ тъй като y не е променлива на B (B и B' имат едни и същи свободни променливи. Защо?) т.е.

$\vdash_T A' \to A$

От друга страна $\vdash_T B \to B'$. Нека $B'' \simeq B'_x[y]$. Тогава $B' \simeq B''_y[x]$ (тъй като y е нова за B') от $\vdash_T B''_y[x] \to \exists y B''$ т.е. $\vdash_T B' \to \exists y B'_x[y]$ и $\vdash_T B \to B'$ имаме $\vdash_T B \to \exists y B'_x[y]$ тъй като x не участва свободно в $\exists y B'_x[y]$

$\vdash_T \exists x B \to \exists y B'_x[y]$ (П∃)

Th за равенството

(1) $\vdash_T a = a$

(2) $\vdash_T a = b \to b = a$

(3) $\vdash_T a = b \to b = c \to a = c$

(4) $\vdash_T b_1 = b_{n+1} \to b_2 = b_{n+2} \to \dots \to b_n = b_{2n} \to a_{x_1 \dots x_n}[b_1 \dots b_n] = a_{x_1 \dots x_n}[b_{n+1} \dots b_{2n}]$

(5) $\vdash_T b_1 = b_{n+1} \to \dots \to b_n = b_{2n} \to A_{x_1 \dots x_n}[b_1 \dots b_n] \to A_{x_1 \dots x_n}[b_{n+1} \dots b_{2n}]$

Док.

(1) $\vdash_T a = a$ (ПЧС) и аксиомата $y_0 = y_0$

(2) Имаме $\vdash_T y_1 = y_3 \to y_2 = y_4 \to y_1 = y_2 \to y_3 = y_4$ (аксиома)
Оттук $\vdash_T a = b \to a = a \to a = a \to b = a$ (ПЧС)
Оттук (1) и (ТТ) $\Rightarrow \vdash_T a = b \to b = a$

(3) Имаме $\vdash_T y_1 = y_3 \to y_2 = y_4 \to y_1 = y_2 \to y_3 = y_4$. Оттук
$a = a \to b = c \to a = b \to a = c$ (ПЧС)

(4)

Оттук (1) (Т) $\vdash_{\Sigma} a=b \to b=c \to a=c$

За контролното - деф на терм, формула

(1) С индукция по a

1 сл) a е някое от променливите $x_1 - x_n$ по точно $a \approx x_i$ за някое $1 \le i \le n$. Тогава

$a_{x_1 \dots x_n}[b_1 \dots b_n] = a_{x_1 \dots x_n}[b_{n+1} \dots b_{2n}] \approx b_i \approx b_{n+i}$

Следователно от $b_1 = b_{n+1} \dots b_i = b_{n+i} \dots b_n = b_{2n} \to$

$a_{x_1 \dots x_n}[b_1 \dots b_n] = a_{x_1 \dots x_n}[b_{n+1} \dots b_{2n}]$ (тавтология)

2 сл) $a \approx x$ и x е различно от $x_1 - x_n$

Нека $a_{x_1 - x_n}[b_1 - b_n] - a_{\vec{x}}[\vec{b_1}]$, $a_{x_1 - x_n}[b_{n+1} - b_{2n}] - a_{\vec{x}}[\vec{b_{n+1}}]$

$A_{x_1 \dots x_n}[b_1 - b_n] - A_{\vec{x}}[\vec{b_1}]$, $A_{x_1 \dots x_n}[b_{n+1} - b_{2n}] - A_{\vec{x}}[\vec{b_{n+1}}]$

Тогава $a_{\vec{x}}[\vec{b_1}] = a_{\vec{x}}[\vec{b_{n+1}}] \approx x = x$

Следователно че $\vdash_{\Sigma} b_1 = b_{n+1} \to \dots \to b_n = b_{2n} \to$

$a_{\vec{x}}[\vec{b_1}] = a_{\vec{x}}[\vec{b_{2n}}]$ следва от (1) и (Т)

(2) $a \approx f a_1 \dots a_k$ за някой k-местен функционален символ f и термове $a_1 \dots a_k$. Съгласно инд. хипотеза

$\vdash_{\Sigma} b_1 = b_{n+1} \dots \to b_n = b_{2n} \to a_{i\vec{x}}[\vec{b_1}] = a_{i\vec{x}}[\vec{b_{n+1}}]$ за

$1 \le i \le k$. От друга страна от аксиомата

$y_1 = y_{k+1} \to y_2 = y_{k+2} \dots \to y_k = y_{2k} \to f y_1 \dots y_k = f y_{k+1} \dots y_{2k}$ и (ПСС)

$\vdash_{\Sigma} a_{1\vec{x}}[\vec{b_1}] = a_{1\vec{x}}[\vec{b_{n+1}}] \to \dots \to a_{k\vec{x}}[\vec{b_1}] = a_{k\vec{x}}[\vec{b_{n+1}}] \to$

$a_{\vec{x}}[\vec{b_1}] = a_{\vec{x}}[\vec{b_{n+1}}]$. Оттук и (Т)

$\vdash_{\Sigma} b_1 = b_{n+1} \to b_2 = b_{n+2} \dots \to b_n = b_{2n} \to a_{\vec{x}}[\vec{b_1}] = a_{\vec{x}}[\vec{b_{n+1}}]$

(3) Индукция по A

(1) $A \approx p a_1 \dots a_k$ за някой k-местен предикатен символ p и термове $a_1 \dots a_k$. Съгласно (1)

$\vdash_{\Sigma} b_1 = b_{n+1} \to \dots \to b_n = b_{2n} \to a_{i\vec{x}}[\vec{b_1}] = a_{i\vec{x}}[\vec{b_{n+1}}]$ за $1 \le i \le k$

От аксиомата за равенството и символа p, и (ПСС)

Имаме $\vdash a_1 \vec{x}[\vec{b}_1] = a_1 \vec{x}[\vec{b}_{n+1}] \to \ldots \to a_n \vec{x}[\vec{b}_1] = a_n \vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$
$\to A\vec{x}[\vec{b}_1] \to A\vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$. Оттук и (T7) $\Rightarrow$
$\vdash_T b_1 = b_{n+1} \to b_2 = b_{n+2} \to \ldots \to b_n = b_{2n} \to A\vec{x}[\vec{b}_1] \to A\vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$

② $A \simeq \neg B$. От инд. предп. $\vdash_T b_1 = b_{n+1} \to \ldots \to b_n = b_{2n} \to$
$\to B\vec{x}[\vec{b}_{n+1}] \to B\vec{x}[\vec{b}_1]$. Оттук (2) и (T7) $\Rightarrow$
$\vdash_T b_1 = b_{n+1} \to \ldots \to b_n = b_{2n} \to \neg B\vec{x}[\vec{b}_1] \to \neg B\vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$

③ $A \simeq B \vee C$ (подобно на ②)

④ $A \simeq \exists x B$. Предвид (T7) и (TB) можем да считаме че $x \neq y_1 \ldots x_n$ и не участва в $b_1 \ldots b_{2n}$. Съгласно инд. предп. $\vdash_T b_1 = b_{n+1} \to \ldots \to b_n = b_{2n} \to B\vec{x}[\vec{b}_1] \to B\vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$. Тъй като $x \neq x_1 \ldots x_n$ имаме че $A\vec{x}[\vec{b}_1] \simeq \exists x B\vec{x}[\vec{b}_1]$ и $A\vec{x}[\vec{b}_{n+1}] \simeq \exists x B\vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$. От това че $B\vec{x}[\vec{b}_{n+1}] \to \exists x B\vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$ (аксиома) $\Rightarrow \vdash_T B\vec{x}[\vec{b}_1] \to b_1 = b_{n+1} \to \ldots \to b_n = b_{2n} \to \exists x B\vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$ (T7)

Тъй като x не участва в $b_1 \ldots b_{2n}$ и не е свободно в $\exists x B\vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$ имаме $\vdash_T \exists x B\vec{x}[\vec{b}_1] \to b_1 = b_{n+1} \to \ldots \to b_n = b_{2n} \to \exists x B\vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$. (T3). Оттук
$\vdash_T b_1 = b_{n+1} \to \ldots \to b_n = b_{2n} \to \exists x B\vec{x}[\vec{b}_1] \to \exists x B\vec{x}[\vec{b}_{n+1}]$
(T7)

Следствие (T=)
1) Ако $\vdash_T a = b$ то $\vdash_T b = a$
2) Ако $\vdash_T a = b$ и $\vdash_T b = c$ то $\vdash_T a = c$
3) Ако $\vdash_T b_1 = b_{n+1} \to \ldots \to b_n = b_{2n}$ то тогава
$\vdash_T a\, x_1 \ldots x_n [b_1 \ldots b_n] = a\, x_1 \ldots x_n [b_{n+1}, \ldots b_{2n}]$
4) — // —, то тогава $\vdash A\, x_1 \ldots x_n [b_1 \ldots b_n] \to A\, x_1 \ldots x_n [b_{n+1} \ldots b_{2n}]$

/

ФА – Пеано арифметика

N1: $0 \neq S\xi_1$

N2: $S\xi_0 = S\xi_1 \to \xi_0 = \xi_1$

N3: $\xi_0 + 0 = \xi_0$

N4: $\xi_0 + S\xi_1 = S(\xi_0 + \xi_1)$

N5: $\xi_0 \cdot 0 = 0$

N6: $\xi_0 \cdot S\xi_1 = \xi_0 \cdot \xi_1 + \xi_0$

Зад. ① $\vdash_{ФА} 0 \neq S0$ – от N1 и (ПЕС) $(\xi_0 / 0)$

② $\vdash_{ФА} 0 \neq SS0$ – от N1 и (ПЕС) $(\xi_0 / S0)$

③ $\vdash_{ФА} 0 + 0 = 0$ – от N3 и (ПЕС) $(\xi_0 / 0)$

④ $\vdash_{ФА} S0 + 0 = S0$ – от N3 и (ПЕС) $(\xi_0 / 0)$

⑥ $\vdash_{ФА} S0 + S0 = SS0 \Longrightarrow \vdash_{ФА} S0 + S0 = S(S0 + 0)$,

N4 и (ПЕС) $\Longrightarrow \vdash_{ФА} S0 + 0 = S0$

$\vdash_{ФА} S0 + S0 = SS0 \Longrightarrow$ ①, ② и Тт

Дом. Раб.

⑦ $\vdash_{ФА} S0 + SS0 = SS0 + S0$

⑧ $\vdash_{ФА} SS0 + (S0 + SS0) = (SS0 + S0) + SS0$

⑨ $\vdash_{ФА} SS0 + SS0 = SS0 \cdot SS0$

⑩ $\vdash_{ФА} SS0 \cdot S0 = SS0$

⑪ $\vdash_{ФА} (SS0 + SS0) \cdot SS0 = SS0 \cdot SS0 + SS0 \cdot SS0$

④