МЛ 28.10.14

Пеано аритметика

1) Език: $0, S, +, \cdot, <$ - нелогически връзки

2) Аксиоми

а) логически аксиоми

$\neg A \vee A$ за всяка формула A

$A_x[b] \to \exists_x A$ за всяка формула A, променлива x и терм b, подходящ за замяна на x в A

$\xi_0 = \xi_0$

$0 = 0$

$\xi_1 = \xi_2 \to S\xi_1 = S\xi_2$

$\xi_1 = \xi_3 \to \xi_2 = \xi_4 \to \xi_1 + \xi_2 = \xi_3 + \xi_4$

$\xi_1 = \xi_3 \to \xi_2 = \xi_4 \to \xi_1 \xi_2 = \xi_3 \xi_4$

$\xi_1 = \xi_3 \to \xi_2 = \xi_4 \to \xi_1 = \xi_2 \to \xi_3 = \xi_4$

б) нелогически аксиоми

система робинсон

N_1. $S\xi_0 \neq 0$

N_2. $S\xi_0 = S\xi_1 \to \xi_0 = \xi_1$

N_3. $\xi_0 + 0 = \xi_0$

N_4. $\xi_0 + S\xi_1 = S(\xi_0 + \xi_1)$

N_5. $\xi_0 \cdot 0 = 0$

N_6. $\xi_0 \cdot S\xi_1 = \xi_0 \xi_1 + \xi_0$

N_7. $\xi_0 \not< 0$ (ξ_0 не е по-малко от 0)

N_8. $\xi_0 < \xi_1 \vee \xi_0 = \xi_1 \vee \xi_1 < \xi_0$

N_9. $(\xi_0 < S\xi_1) \leftrightarrow (\xi_0 = \xi_1 \vee \xi_0 < \xi_1)$

N_{10} (Аксиомна схема за индукцията)

$$\underbrace{A_x[0]}_{\text{база на индукцията}} \to \underbrace{\forall x (A \to A_x[Sx])}_{\text{индукционна стъпка}} \to A$$

за $\forall$ формула A и променлива x

3) Правила

$\frac{A}{B \vee A}$ (ПР), $\frac{A \vee B, \neg A \vee C}{B \vee C}$ (ПИ)

$\frac{A \vee A}{A}$ (ПС) $\frac{A \to B, x \text{ не е свойство в } B}{\exists x A \to B}$ (П$\exists$)

$\frac{A \vee B \vee C}{(A \vee B) \vee C}$ (ПА)

Теореми за формални системи от първи ред

Деф Ще казваме, че формулата A е тавтология на формалната система $\mathcal{F}$ ако A се получава от съждителна тавтология B, заместваики съждителните променливи на B с формули ~~от~~ $\mathcal{F}$

Th

Тъй като всяка формална система от първи ред съдържа аксиомите и правилата (ПР), (ПС), (ПА) и (ПМ) в сила е следната Th

Нека A е тавтология на $\mathcal{F}$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}} A$.

В частност, ако B е тавтологично следствие на $B_1 \ldots B_n$, $n \geq 0$ (т.е. $B_1 \to B_2 \ldots \to B_n \to B$ е тавтология) и $\vdash_{\mathcal{F}} B_1, \ldots, \vdash_{\mathcal{F}} B_n$ то $\vdash_{\mathcal{F}} B$

Th

Нека A, A' и B са формули и нека B' се получава от B, заместваики 0, 1, няколко и всички срещания на A в B с A'

Тогава ако $\vdash_{\mathcal{F}} A \leftrightarrow A'$ то $\vdash_{\mathcal{F}} B \leftrightarrow B'$

Лема

$\vdash_f \forall x A \rightarrow A_x[b]$ за всяка формула A, променлива x и терм b, подходящ за замяна на x в A

Лема

Ако $\vdash_f A$ то $\vdash_f A_x[b]$

Деф

Нека A и A' са формули. Ще казваме че A' е частен случай на A ако $A' \simeq A_{x_1 \ldots x_n}[b_1 \ldots b_n]$ за някои различни променливи $x_1 \ldots x_n$ и подходящи терми $b_1 \ldots b_n$

Забележка

A е частен случай на A

Правило за частните случаи (ПЧС)

Нека A' е частен случай на A и $\vdash_f A$. Тогава $\vdash_f A'$

Док

Нека $\vdash_f A$ и $A' \simeq A_{x_1 \ldots x_n}[b_1 \ldots b_n]$. Нека $y_1 \ldots y_n$ са нови различни променливи (т.е. $y_1 \ldots y_n$ са две по две различни, и не се срещат нито в A, нито в $b_1 \ldots b_n$, нито са някои от $x_1 \ldots x_n$). Нека сега $A_0 \simeq A$, $A_{i+1} \simeq A_{i\, x_i}[y_i]$ за $1 \leq i \leq n-1$. Съгласно лема 2 $\vdash_f A_i$ за $0 \leq i \leq n$. При това $A_n \simeq A_{x_1 \ldots x_n}[y_1 \ldots y_n]$ (т.к. $y_1 - y_n$ са нови)

Нека $A_0 \simeq A_n$ и $A_{i+1} \simeq A_{i\, y_i}[b_i]$ за $0 \leq i \leq n-1$

Съгласно лема 2 $\vdash_f A_i$ за $0 \leq i \leq n$. Но $A_n \simeq A_{x_1 - x_n}[b_1 - b_n]$ (т.к. $y_1 - y_n$ са нови) и следователно $\vdash_f A'$

Th за частен случай

(i) $\vdash_f \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A \to A_{x_1 \ldots x_n}[b_1 \ldots b_n]$

(ii) $\vdash_f A_{x_1 \ldots x_n}[b_1 \ldots b_n] \to \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n A$

Док (i)

От лема 1 имаме

$\vdash_f \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A \to \forall x_2 \forall x_3 \ldots \forall x_n A$

$\vdash_f \forall x_2 \forall x_3 \ldots \forall x_n A \to \forall x_3 \forall x_4 \ldots \forall x_n A$

$\vdots$

$\vdash_f \forall x_n A$

оттук и от (ТТ) $\vdash_f \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A \to A$

откъдето съгласно (ПСС) $\vdash_f \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A \to$

$\to A_{x_1 \ldots x_n}[b_1 \ldots b_n]$

Док (ii)

От аксиомата за частните случаи имаме

$\vdash_f A \to \exists x_n A$

$\vdash_f \exists x_n A \to \exists x_{n-1} \exists x_n A$

$\vdots$

$\vdash_f \exists x_2 \exists x_3 \ldots \exists x_n A \to \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n A$

оттук и (ТТ) $\vdash_f A \to \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n A$,

откъдето съгласно (ПСС)

$\vdash_f A_{x_1 \ldots x_n}[b_1 \ldots b_n] \to \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n A$

Правило $\forall\exists$ (П$\forall\exists$)

Нека $\vdash_f A \to B$. Тогава $\vdash_f \exists x_1 \to \exists x B$ и

$\vdash_f \forall x A \to \forall x B$

Док

Нека $\vdash_f A \to B$. Оттук и това че $\vdash_f B \to \exists x B$

(ПСС) имаме $\vdash_f A \to \exists x B$ (ТТ)

Тъй като x не е $\exists x B$ имаме
$\vdash_f \exists x A \to \exists x B$ (ПЭ)
От $\vdash_f A \to B$ и $\vdash_f \forall x A \to A$ (ТСС) имаме
$\vdash_f \forall x A \to B$ (ТТ). Т.к. x не е свободна
в $\forall x A$, имаме $\vdash_f \forall x A \to \forall x B$ (ПА)

Деф

Нека A е формула. Дефинираме вариант на A чрез следната индукция

(1) Ако A е атомарна то (единственият) вариант на A е A

(2) Ако A е $B \vee C$ и B', C' са варианти съответно на B и C, то $B' \vee C'$ е вариант на A

(3) Ако A е $\neg B$ и B' е вариант на B то $\neg B'$ е вариант на A

(4) Ако A е $\exists x B$ и B' е вариант на B, а y е променлива, не участваща в B' то $\exists y B'_x[y]$ е вариант на A

Пример

$$\exists v_0 (\forall v_1 (v_0 < v_1) \to v_0 < v_2)$$

$$\exists v_1 (\forall v_4 (v_3 < v_4) \to v_3 < v_2)$$

Th на вариантите (ТВ)

Ако A' е вариант на A, то $\vdash_f A \leftrightarrow A'$.

Док (с индукция по A)

(1) A е атомарна. Тогава $A' \approx A$ и $\vdash_f A \leftrightarrow$ (ТТ)

(2) A е $B \vee C$. Тогава $A' \approx B' \vee C'$ за някои варианти B' и C' на B и C. От индукционното предположение $\vdash_f B \leftrightarrow B'$

$\vdash_{f} C \in x'$. Оттук (Т3) $\vdash_{f} (B \vee C) \leftrightarrow (B' \vee C')$

③ ~~A е $\neg B$. Тогава A' е $\exists_y B'_x[y]$ за~~

③ A е $\neg B$ аналогично

④ A е $\exists_x B$. Тогава A' е $\exists_y B'_x[y]$ за вариант B' на B и нова за B'' променлива y от индукц.-то предположение

$$\vdash_{f} B \leftrightarrow B'$$

От тук $\vdash_{f} B \to B'$ следва $\vdash_{f} \exists_x B \to \exists_x B'$ (П$\vee\exists$)