МЛ 21.10.14 Ганчев

~~[illegible]~~

Формални системи на предикатното смятане от I-ви ред

1. Език от I-ви ред: Символите на всеки език от I-ви ред се разделят на следните основни групи
(i) променливи (индивидни): $z_1, z_2, z_3, \dots$
(ii) функционални: колекция от символи (различни от променливите) такива че за всеки символ е асоциирано естествено число (число ≥ 0) което наричаме местност
(iii) предикатни символи: колекция от символи (различни от променливите и функционалните символи), т.е. за всеки символ е асоциирано естествено число
(iv) логически символи: $=$ (двуместен предикатен), $\neg$, $\vee$, $\exists$

Символите на един език от I-ви ред еднозначно се определят от функционалните и предикатните символи на езика.
В случай че функционалните и предикатните символи на езика са краен брой, ще казваме че езика е краен.
Означения: буквите $x, y, z, x_0, y_0 \dots$ ще е използвана за заместители на променливите, съответно буквите $f, g, h, f_0 \dots$ - функционалните, а $p, q, r, p_0, q_0, \dots$ заместители на предикатните символи.

Пример 1: $\mathcal{L}(ZF)$ - Цермело-Френкел
Няма функционални символи, но има само един двуместен предикатен: $\in$ $(x \in y)$

Пример 2: $\mathcal{L}(PA)$ - Пеано аритметика
функционални символи: 0 - нула местно
S - едноместен - наследник
$+, \cdot$ - двуместни
предикатни символи:
$<$ - двуместен
$=$ - двуместен
$\mathcal{L}(PA)$ е краен език с 6 символа

Пр 3/ Възможно е да разглеждаме език от Т-ви рое в който Γ_a е нула местен функционален символ за $\forall a \in \mathbb{R}$

Пр 4 $\mathcal{L}(Geom)$: функционални символи: няма
предикатни символи: $\underset{\text{точка}}{T}$, $\underset{\text{права}}{П}$, $\underset{\text{равнина}}{(P)}$ - едноместни

I - инцидентност - двуместен
M - триместен - релация (наредба)

Терм: (1) Всяка променлива от езика на формалната система $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ е терм
(2) Ако f е n-местен функционален символ на $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ $(n \geq 0)$ и $a_1, \ldots, a_n$ са термове, то $f a_1 \ldots a_n$ е терм (ако f е нула местен то f е терм, f наричаме константа)

Формула: (1) За всеки n-местен предикатен символ P (включително двуместния символ $=$) и всеки избор на термове $a_1, \dots, a_n$, думата $P a_1 \dots a_n$ е формула (атомарни)

(2) Ако A и B са формули то $\vee AB$ е формула

(3) Ако A е формула то $\neg A$ е формула

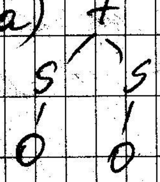
(4) Ако A е формула то $\exists v_k A$ е формула за $\forall k \geq 0$

Зад 1 Кои от следните са термове от $\mathcal{L}(PA)$

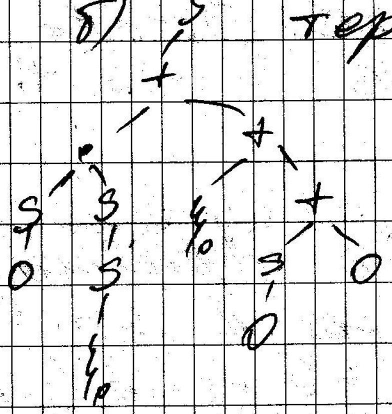
а) $+S0S0$, б) $S+\cdot S0SSv_0+v_0+S00$, в) $0S0$

г) v_0+00, д) $S0v_0$, е) $+S0SS+v_0S0\cdot v_0$

а) терм



б) терм

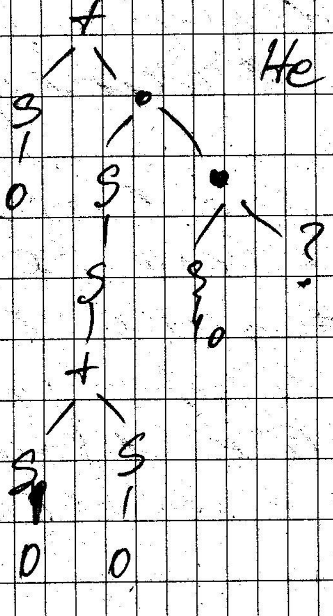


в) 0 не

г) v_0 не

д) не

е) Не



(2) Нека A е формула. Тогава е вярно точно едно от следните

(i) $\exists$ единствено естествено число $n \geq 0$, $\exists$ единствен предикатен символ p и единствени термове $a_1, \dots, a_n$ т.ч. $A \simeq p a_1 \dots a_n$

(ii) $\exists$-т единствени формули B и C т.ч. $A \simeq \vee BC$

(iii) $\exists$ единствена формула B т.ч. $A \simeq \neg B$

(iv) $\exists$-т единствени формула B и естествено число $k \geq 0$ т.ч. $A \simeq \exists v_k B$

Следствие

Нека φ_1 е терм или формула и φ_2 е терм или формула. Тогава ако φ_1 е начален отрез (префикс) на φ_2 (т.е. $\varphi_2 \simeq \varphi_1 \psi$) то тогава $\varphi_1 \simeq \varphi_2$

Деф Нека A и B са формули. Казваме че B е подформула на A ако A е от вида $\dots B \dots$ т.е. B е поддума (инфикс) на A.

Деф Нека φ е терм или формула. Променливи на φ ще наричаме всички променливи които се срещат в φ

Деф Нека A е формула и x е променлива (x е v_k за някое k). Ще казваме, че едно срещане на x в A е свързано, ако това срещане на x е част от подформула на A от вида $\exists x B$. В противен случай казваме че срещането на x е свободно

Въвеждаме следните съкращения

1) &, →, ↔, ∨ както в съждителното смятане

2) Ако f е двуместен функционален символ пишем (a f b) вместо fab

3) Ако φ е двуместен предикатен символ пишем aφb вместо φab

4) Пишем $\forall x A$ вместо $\neg\exists x \neg A$

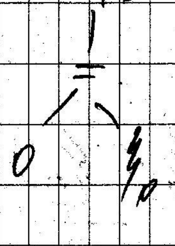
5) Отрицание на предикат → ~~...~~ анулира предиката   Пример $\neq \xi_0 \neq 0$

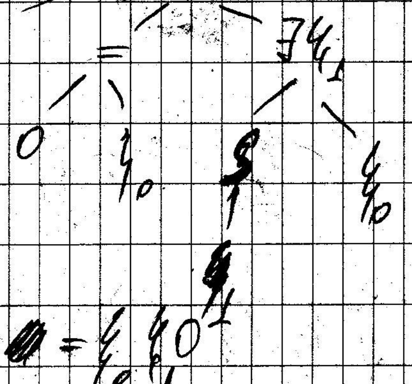
Задача Кои от следните са формули

1) $\exists \xi_0 = 0 \xi_0$, 2) $\exists S 0 \xi_0 = S0$

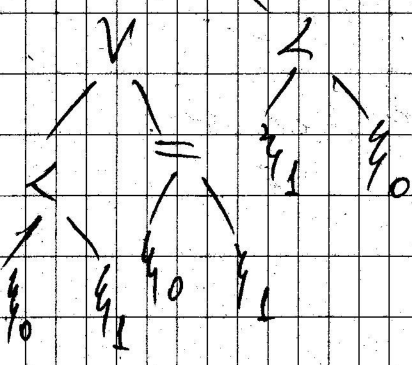
3) $\vee = 0 \xi_0 \exists \xi_1 = S \xi_1 \xi_0$, 4) $\vee \vee \xi_0 \xi_1 = \xi_0 \xi_1 < \xi_1 \xi_0$

1) $\exists \xi_0$ да , 2) $\exists S$ – не , 3)

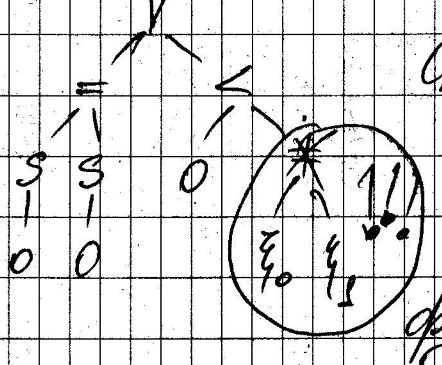




4) да



5) $\vee = S0S0 < \ast = \xi_0 \xi_1 0$



След предикатен символ 2-ри предикатен няма ~~има~~ само функционални символи и променливи

Th. (за еднозначен прочит)

1) Нека a е терм. Тогава е вярно точно едно от следните

(i) $\exists$ единствено $n \geq 0$ т.е. $a \simeq v_n$

(ii) $\exists$-т единствено естествено число $n \geq 0$, n-местен функционален символ f и единствени термове $a_1, \dots, a_n$ т.е. $a = f a_1 \dots a_n$

Зад. В случай че формулите от $\mathcal{F}(PA)$ са коректно записани, да се определят свързаните и свободните участия на променливите

B - свързан - bounded

F - свободно - free

1) $\neg \underset{F}{v_0} = 0 \to \exists \underset{B}{v_1} (\underset{F}{v_0} = S \underset{B}{v_1})$

2) $\exists \underset{B}{v_0} (\underset{B}{v_0} = 0 \vee \exists \underset{B}{v_1} (\underset{B}{v_0} = \underset{F}{v_2}))$

3) $0 < \underset{F}{v_0} \to \forall \underset{B}{v_1} (\underset{B}{v_1} < \underset{F}{v_0} \to S\underset{B}{v_1} < \underset{F}{v_0}) \to \forall \underset{B}{v_1} (\underset{B}{v_1} < \underset{F}{v_0})$

4) $\exists \underset{B}{v_1} (\underset{F}{v_0} = \underset{B}{v_1} \cdot SS0)$ - четно число ($v_0 = v_1 \cdot 2$)

5) $\exists \underset{B}{v_1} (\underset{F}{v_0} = S(\underset{B}{v_1} \cdot SS0))$ - нечетно число $v_0 = (v_1 \cdot 2) + 1$