МЛ Ганчев 23.03.15

Th. Нека α е безкраен ордел. Тогава $Card(\alpha\times\alpha) = Card(\alpha)$

Док.

Допускаме че твърдението не е вярно, и нека α е най-малкият безкраен ординал, за който $Card(\alpha\times\alpha) \neq Card(\alpha)$. Т.к. $f: \alpha \to \alpha\times\alpha$, дефинирано с $f(x) = (x, 0)$, е инекция $Card(\alpha) < Card(\alpha\times\alpha)$

Да разгледаме $\leq$ в $\alpha\times\alpha$ дефинирано с

$(\beta,\gamma) < (\beta',\gamma') \overset{def}{\iff} \max\{\beta,\gamma\} < \max\{\beta',\gamma'\} \vee$
$(\max\{\beta,\gamma\} = \max\{\beta',\gamma'\} \,\&\, \beta < \beta') \vee$
$(\max\{\beta,\gamma\} = \max\{\beta',\gamma'\} \,\&\, \beta = \beta' \,\&\, \gamma < \gamma')$

1 сл) $<$ е наредба (строга)

1.1 сл) $(\beta\gamma) \nless (\beta'\gamma')$ - ясно

1.2 сл) $(\beta\gamma) < (\beta',\gamma') \,\&\, (\beta'\gamma') < (\beta''\gamma'') \Rightarrow (\beta\gamma) < (\beta'',\gamma'')$ от $(\beta\gamma) < (\beta',\gamma')$ и $(\beta'\gamma') < (\beta'',\gamma'') \Rightarrow \max\{\beta\gamma\} \leq \max\{\beta'\gamma'\} \leq \max\{\beta'',\gamma''\}$. Предполагаме че $\max\{\beta\gamma\} = \max\{\beta''\gamma''\}$ и $\beta' \nless \beta''$. Тогава $\max\{\beta\gamma\} = \max\{\beta'\gamma'\} = \max\{\beta'',\gamma''\}$ и $\beta \nless \beta'$ и $\beta' \nless \beta''$. Оттук $\beta = \beta' = \beta''$ и сл $\gamma < \gamma'$ и $\gamma' < \gamma''$. Оттук $\gamma < \gamma''$

$<$ е добра наредба

Нека $X \subseteq \alpha\times\alpha$ и $X \neq \emptyset$. Нека $X' = \{\max\{\beta,\gamma\} \mid (\beta\gamma) \in X\}$. Тогава X' е непразно мн-во от ординали. Нека δ_0 е най-малкият елемент на X'. Нека $X'' = \{\beta \mid \exists\gamma$ за което $(\beta\gamma) \in X$ и $\max\{\beta\gamma\} = \delta_0\}$. X'' е непразно мн-во от ординали и нека β_0 е най-малкият му елемент. $X''' = \{\gamma \mid (\beta_0\gamma) \in X$ и $\max\{\beta_0\gamma\} = \delta_0\}$. X''' е непразно мн-во от ординали и нека γ_0 е най-малкият му елемент.

$(\beta_0 \gamma_0)$ е най-малкият елемент на X
$(\beta \gamma) \in X$, $\max\{\beta \gamma\} \geq \delta_0 = \max\{\beta_0 \gamma_0\}$

Следствие за всяко безкрайно множество X
1) $Card(X^n) = Card(X)$
2) $Card(\bigcup_{n \in \omega} X^n) = Card(X)$

Следствие
Нека T е непротиворечива теория и нека в T има κ на брой символи, т.е $Card(S_T) = \kappa$, където S_T е мн-во от всички променливи логически символи и нелогически символи на T. Тогава T има модел с мощност най-много κ.
Док
От това че $Card(S_T) = \kappa \Rightarrow$ мощността на мн-вото от термове и ф/ните на T е κ. Оттук мощността на мн-вото на специалните константи е също κ, откъдето стандартната структура на пълното хенкиново решение на от Th за пълнота е с мощност най-много κ

Th (Льовенхайм-Сколем (пълна))
Нека T е теория, чийто език съдържа κ на брой символи ($\kappa \geq \aleph_0$ т.к. изброимо много променливи) Нека $\kappa' \geq \kappa$. Тогава ако T е непротиворечива и T има безкраен модел, то T има модел с мощност κ'
Док
Нека T' се получава от T, добавяйки нови константи c_i, където $i \in X$ за някое фиксирано

X с мощност κ', т.е. $Card(X) = \kappa'$. T' е консервативно разширение на T. Нека $\Gamma = \{c_i \neq c_j \mid i,j \in X, i \neq j\}$. Фиксираме $\Gamma' \subseteq \Gamma$ което е крайно. Тогава Γ' има вида $c_{i_1} \neq c_{i_2}$, $c_{i_3} \neq c_{i_4}$ ... $c_{i_{2n+1}} \neq c_{i_{2n+2}}$, където за $\forall\, 0 \le k \le n$ $i_{2k+1} \neq i_{2k+2}$. Нека $\mathcal{U}$ е безкрайна структура т.ч. $\mathcal{U} \models T$. Нека $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n+2} \ldots$ са различни елементи на $|\mathcal{U}|$. Обогатяваме $\mathcal{U}$ до $\mathcal{U}'$ за $\mathcal{L}(T')$, полагайки $\mathcal{U}'(c_i) = \begin{cases} \alpha_j & \text{ако } c_i \approx c_{i_j} \text{ за } 1 \le j \le 2n+2 \\ \alpha_1 & \text{иначе} \end{cases}$

Тогава за $\forall\, 0 \le k \le n$, $\mathcal{U}'(c_{i_{2k+1}} \neq c_{i_{2k+2}}) \equiv \Pi$, т.к. $\mathcal{U}'(c_{i_{2k+1}}) = \alpha_{2k+1} \neq \alpha_{2k+2} = \mathcal{U}'(c_{i_{2k+2}}) \Rightarrow \mathcal{U}' \models T'[\Gamma']$ и значи $T'[\Gamma']$ е непротиворечива

От Th за компактност

$T'[\Gamma]$ е непротиворечива. В $T'[\Gamma]$ има κ' брой символи и сл. $T'[\Gamma]$ има модел $\mathcal{U}'_{\kappa'}$ с мощност най-много κ'. Нека $\beta_i = \mathcal{U}'_{\kappa'}(c_i)$ за $i \in X$. Т.к. в $\mathcal{U}'_{\kappa'} \models c_i \neq c_j$ за $i \neq j$, $i,j \in X$, в има е $\beta_i \neq \beta_j$ за $i \neq j$, $i,j \in X$. Оттук $|\mathcal{U}'_{\kappa'}|$ има подмножество с мощност κ', и сл. $Card(\mathcal{U}'_{\kappa'}) = \kappa'$. Нека $\mathcal{U}_{\kappa'}$ е обедняването на $\mathcal{U}'_{\kappa'}$ до структура за T. $\mathcal{U}_{\kappa'}$ е търсеният модел на T с мощност κ'

Сл. Парадокс на Льовенхайм-Сколем