МЛ Тончев 20.01.15

Т[а] Нека α е ординал. Тогава $\alpha = \beta+1$ за някое β или $\alpha = \bigcup\alpha$

Док.

Нека $\alpha \neq \beta+1$ за някое β. Ако $\alpha = 0$ то тогава $\alpha = \bigcup 0 = 0 = \alpha$. Нека сега $\alpha \neq 0$. Тогава т.к. $\alpha \neq \beta+1$ за някое β, ако $\gamma \in \alpha$ ($\gamma < \alpha$) то $\gamma+1 \in \alpha$ ($\gamma+1 < \alpha$). Наистина от $\beta < \gamma+1 = \gamma \cup \{\gamma\} \Rightarrow$ или $\beta < \alpha$ или $\beta = \gamma$

(1) $\bigcup\alpha \subseteq \alpha$. Нека $\beta \in \bigcup\alpha$ т.е. $\beta \in \gamma$ за някое $\gamma \in \alpha$ т.к. α е транзитивно, $\gamma \subseteq \alpha$ и сл. $\beta \in \alpha$

(2) $\alpha \subseteq \bigcup\alpha$. Нека $\beta \in \alpha$. Тогава $\beta+1 \in \alpha$ т.е. $\gamma = \beta \cup \{\beta\} \in \alpha$. Но $\beta \in \gamma$ и сл. $\beta \in \bigcup\alpha$

Следствие. За всеки ординал α е вярно точно едно от следните

(1) $\alpha = 0$, (2) $\alpha = \beta+1$ за някое β (ординал)

(3) $\alpha = \bigcup\alpha$ и $\alpha \neq 0$

Пример

Ординалите $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ ... $n+1 = \{0 .. n\}$ са ординали наследници. С ω означаваме най-малкият ненулев граничен ординал. ω наричаме множество на естествените числа (ординал)

$\omega+1, \omega+2$ ... $\omega+n$ са ординали наследници

$\omega+\omega$ е граничен

Th| Нека φ е свойство т.ч.

1) $\varphi(0)$, 2) Ако $\varphi(\alpha) = T$ то $\varphi(\alpha+1) = T$

3) Ако $\alpha = \bigcup\alpha$ и за $\forall \beta < \alpha$, $\varphi(\beta) = T$ то $\varphi(\alpha) = T$

Тогава за всеки ординал α, $\varphi(\alpha) = T$

Док.

Допускаме че φ не е вярно за всеки ординал. Нека α е най-малкият ординал за който не е вярно φ. От (1) $\alpha \neq 0$

1 сл) $\alpha = \beta + 1$. Тогава $\beta < \alpha$ и значи $\varphi(\beta) \equiv \Pi$ оттук и (2) $\Rightarrow$ $\varphi(\alpha) \equiv \Pi \Rightarrow ↯$

2 сл) $\alpha = \cup\alpha$. Но за всеко $\beta < \alpha$, $\varphi(\beta) \equiv \Pi$. оттук и (3) $\Rightarrow \varphi(\alpha) \equiv \Pi \Rightarrow ↯$

Можем да правим индукция по ординали.

Тв) Съвкупността (класът) на всички ординали не е множество

Док

Нека $X = \{\alpha \mid Ord(\alpha)\}$ е множество. Нека $\beta = \cup X$
Тогава $Ord(\beta)$ и за всеки ординал α, $\alpha < \beta$
Наистина нека $\alpha \in X$. Тогава $\gamma = \alpha + 1 \in X$ и значи $\gamma \subseteq \cup X = \beta = \bigcup_{\delta \in X} \delta$. Но $\alpha \in \gamma$ и значи $\alpha \in \beta$ т.е. $\alpha < \beta$. оттук $\beta < \beta \Rightarrow ↯$

Тв) Всяко добре наредено множество е изоморфно на точно един ординал

Деф Ще казваме че $Ord(\alpha)$ е кардинал (кардинално число), ако $\nexists\, \beta < \alpha$ т.ч. α и β са равномощни

Пример: $0, 1, 2 \ldots$ и $\ldots \leq \omega$ са кардинали
$\omega = \omega_0 = \aleph_0$ е кардинал ($\aleph$-алеф)

$\omega+1, \omega+2 \dots \omega+n \dots \omega^2 \dots \omega^{2n} \dots \omega^{\omega^\omega}$ не са кардинали, т.к са изброими. Най-малкият неизброим кардинал означаваме с $\aleph_1 = \omega_1$

Изобщо ① Ако α е кардинал с α^+ означаваме най-малкият кардинал по-голям от α

② Ако X е множество от кардинали то $\cup X$ също е кардинал, при това ако X няма най-голям елемент, то $\cup X$ е кардинал по-голям от всеки елемент на X

Означение (1) $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$

(2) $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$

(3) Ако $\alpha = \cup\alpha$ $\quad \aleph_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$

Казваме че $Card\, X = \aleph_\alpha$, ако $\exists$ биекция между X и $\aleph_\alpha$

Th) (Аксиома за избора)

За всяко множество X, $\exists\ Ord(\alpha)$ т.ч.

$Card\, X = \aleph_\alpha$

$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$, $Card(X \times X) = \aleph_\alpha$ защото $Card\, X = \aleph_\alpha$