МЛ 13.11.14

Да се приведе в пренексен вид ф/лата

① $\forall x(x < SS0 \to \exists x(x \le S0)) \to \exists x(x=0)$

$\models (\forall x(x < SS0 \to \exists x(x \le S0)) \to \exists x(x=0)) \leftrightarrow$

$\exists x((x < SS0 \to \exists y(y \le S0)) \to \exists z(z=0)) \leftrightarrow$

$\exists x \exists z((x < SS0 \to \exists y(y \le S0)) \to z=0) \leftrightarrow$

$\exists x \exists z \forall y(x < SS0 \to y \le S0 \to z=0)$, x,y,z - различни

② $\forall x(x > 0 \to x \ge S0) \& \exists x(x > 0 \& x < SS0)$

$\models (\forall x(x > 0 \to x \ge S0) \& \exists y(y > 0 \& y < SS0)) \leftrightarrow$

$\forall x((x > 0 \to x \ge S0) \& \exists y(y > 0 \& y < SS0)) \leftrightarrow$

$\forall x \exists y((x > 0 \to x \ge S0) \& (y > 0 \& y < SS0))$ x, y разл

③ $\neg\exists y(x = Sy) \to x = 0$

$\models (\neg\exists y(x = Sy) \to x=0) \leftrightarrow (\forall y \neg(x = Sy) \to x=0) \leftrightarrow$ $x \neq y$

$\exists y(x \neq Sy \to x=0)$

④ $\models \forall x(x|y \to (x = S0 \vee x = y)) \to \exists x \exists z(x \neq z \& y = xz) \leftrightarrow$

$\models (\forall x(x|y \to (x = S0 \vee x = y)) \to \exists u \exists z(u \neq z \& y = uz) \leftrightarrow$

$\forall x \exists u \exists z(\neg(x|y \to (x = S0 \vee x = y)) \to (u \neq z \& y = uz) \leftrightarrow$

$\forall x(x \ge 0) \to \exists x(x=0) \to \forall x(x \neq 0)$

$\models (\forall x(x \ge 0) \to (\exists y(y=0) \to \forall z(z \neq 0))) \leftrightarrow$

$\exists x \forall y \exists z(x \ge 0 \to y = 0 \to z \neq 0)$

$\models (\exists x A \vee \exists x B) \leftrightarrow \exists x(A \vee B)$

$\models \exists x A \vee \exists x B \to \exists x(A \vee B)$

Имаме $\models (A \vee B) \to \exists x(A \vee B)$ - аксиома

Освен това $\models A \to A \vee B$ и $\models B \to A \vee B$ и следователно

от $\models A \to \exists x(A \vee B)$ и $\models B \to \exists x(A \vee B)$. Т.к. x нее

свободно в $\exists x(A \vee B)$ имаме $\exists x A \to \exists x(A \vee B)$ и
$\vdash_T \exists x B \to \exists x(A \vee B)$. Оттук $\exists x A \vee \exists x B \to \exists x(A \vee B)$

$\vdash_T \exists x(A \vee B) \to \exists x A \vee \exists x B$. Имаме $\vdash_T A \to \exists x A$, $\vdash_T B \to \exists x B$
аксиома, сл $\vdash_T (A \vee B) \to \exists x(A \vee B)$. x не е свободно в
$\exists x A \vee \exists x B$ и сл $\vdash_T \exists x(A \vee B) \to (\exists x A \vee \exists x B)$

Структури

Нека $\mathcal{L}$ е език от първи ред. Структура $\mathcal{U}$ за $\mathcal{L}$ се състои от

1) непразно мн-во $|\mathcal{U}|$. $|\mathcal{U}|$ наричаме носител на $\mathcal{U}$
2) за $\forall n \geq 0$ и $\forall$ n-местен функционален символ f на $\mathcal{L}$ има функция $f_{\mathcal{U}} : |\mathcal{U}|^n \to |\mathcal{U}|$
3) $\forall n \geq 0$ и $\forall$ n-местен предикатен символ p на $\mathcal{L}$ различен от $=$, имаме $P_{\mathcal{U}} \subseteq |\mathcal{U}|^n$

Нека $\mathcal{U}$ е структура за езика $\mathcal{L}$. Тогава с $\mathcal{L}$-$\mathcal{U}$ ще означаваме езика, който се получава от $\mathcal{L}$ добавяйки нова const $\underline{\alpha}$ за $\forall \alpha \in |\mathcal{U}|$. $\underline{\alpha}$ се нарича име на α. Структурата интерпретира $\underline{\alpha}$ като α

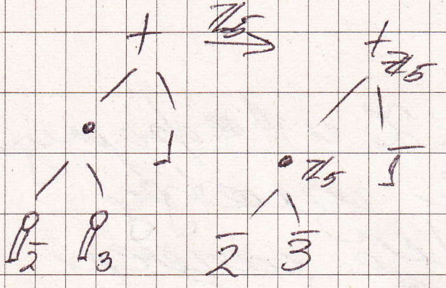
Деф Нека $\mathcal{U}$ е структура за $\mathcal{L}$ и „a" е затворен терм на $\mathcal{L}$-$\mathcal{U}$. Дефинираме стойността на „a", $\mathcal{U}(a)$ в $\mathcal{U}$ чрез следната индукция

1) a е константа на $\mathcal{L}$. Тогава стойността $\mathcal{U}(a) \equiv a_{\mathcal{U}}$
2) a е името $\underline{\alpha}$. Тогава стойността $\mathcal{U}(a) \equiv \alpha$
3) a е $f a_1 \ldots a_n$ за някой n-местен функционален символ f и затворени термове $a_1, \ldots, a_n$. Тогава $\mathcal{U}(a) \equiv f_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}(a_1), \ldots, \mathcal{U}(a_n))$

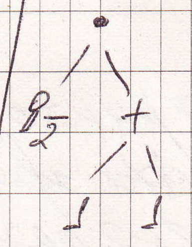
Примери

Нека $\mathcal{L}$ се състои от $0, 1, +, \cdot$. Нека $\mathbb{Z}_5$ интерпретира символите на $\mathcal{L}$ по обичайният начин

а) $\mathbb{Z}_5(+\,\cdot\,\dot{v}_2, \dot{v}_3, 1) \equiv \bar{2}$



б) $\mathbb{Z}_5(\cdot\,\dot{v}_2 + 1\,1) \equiv \bar{4}$



Деф Нека $\mathcal{U}$ е структура за $\mathcal{L}$ и нека A е затворена формула от $\mathcal{L}$-и. Дефинираме стойност $\mathcal{U}(A)$ на A в $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}(A) \in \{T, F\}$) чрез следната индукция

а) A е атомарна. Тогава $A \simeq p a_1 \dots a_n$ за някой n-местен предикатен символ p и затворени термове $a_1, \dots, a_n$

1сл) p е $=$ т.е. $A \simeq a_1 = a_2$. Тогава $\mathcal{U}(A) \equiv T \overset{def}{\Longleftrightarrow} \mathcal{U}(a_1) \equiv \mathcal{U}(a_2)$

2сл) p не е $=$. Тогава $\mathcal{U}(A) \equiv T \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{U}(a_1), \dots, \mathcal{U}(a_n)) \in p_{\mathcal{U}}$

б) A е $B \vee C$. Тогава B и C са затворени. Дефинираме стойността $\mathcal{U}(A) \equiv H_\vee(\mathcal{U}(B), \mathcal{U}(C))$

в) A е $\neg B$. Тогава B е затворено. Дефинираме $\mathcal{U}(A) \equiv H_\neg(\mathcal{U}(B))$

г) A е $\exists x B$. Тогава свободните променливи на B са измежду x. Дефинираме $\mathcal{U}(A) \equiv T \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{U}(B_x[i_\alpha]) \equiv T$ за $\alpha \in |\mathcal{U}|$)

Свойства

1) $\mathcal{U}(B \& C) \equiv H_{\&}(\mathcal{U}(B), \mathcal{U}(C))$

2) $\mathcal{U}(B \to C) \equiv H_{\to}(\mathcal{U}(B), \mathcal{U}(C))$

3) $\mathcal{U}(B \leftrightarrow C) \equiv H_{\leftrightarrow}(\mathcal{U}(B), \mathcal{U}(C))$

4) $\mathcal{U}(\forall x B) = \mathbb{T} \overset{def}{\longleftrightarrow} \mathcal{U}(B_x[\underline{\alpha}]) = \mathbb{T}$ за $\forall \alpha \in |\mathcal{U}|$

Деф.

Нека $\mathcal{U}$ е структурата на $\mathcal{L}$ и A е формула от $\mathcal{L}$ със свободни променливи измежду $x_1 .. x_n$ ($x_1, .. x_n$ са 2×2 различни). Ще пишем $\mathcal{U} \models A$, ако $\mathcal{U}(A_{x_1 .. x_n}[\underline{\alpha_1} .. \underline{\alpha_n}]) = \mathbb{T}$ за всеки избор на $\alpha_1, .., \alpha_n \in |\mathcal{U}|$