МЛ Лекция 19-11-14

Нека T е теория от I-ви ред и нека D е ф/ла на T със ~~свързана~~ свободна променлива измежду $x_1,\dots,x_n,y$ ($x_1,\dots,x_n$ и y са различни). Нека са в сила следните

(i) $\vdash_T \exists_y D$

(ii) $\vdash_T (D \,\&\, D_y[y']) \to y=y'$, където y' е нова променлива и y' не участва в D

Нека T' се получава от T, добавяйки нов n-местен фун/лен символ f и нова нелогическа аксиома (определяща за f)

$f(x_1 .. x_n) = y \leftrightarrow D$

Нека B е ф/ла от T'. Деф-ме превод B^* на B чрез следната индукция по построението на B

① B е атомарна: Деф-ме B^* с индукция по броя на срещанията на f в B

а) B не съдържа f. Тогава $B^* \simeq B$

б) Нека B съдържа $n+1$ срещания на f. Тогава $B \simeq B'_z[f a_1 .. a_n]$ за някоя атомарна ф-ла B' съдържаща n срещания на f, променлива z, не участваща в B и D и термове $a_1 .. a_n$ не съдържащи f. Превод B^* на B е всяка ф/ла от вида $\exists z\, (B'^* \,\&\, D'_{x_1 .. x_n y}[a_1 .. a_n z])$, където D' е вариант на D не съдържащ свързани променливи, участващи в $a_1 .. a_n, z$

Пр: Нека T е PA, а D е ф/лата $x.x=y$, $D \simeq x.x=y$

Имаме $\vdash_{PA} x.x = x.x$ $(T=)$. Оттук и аксиомата за ∃са $\vdash_{PA} \exists_y (x.x = y)$

$\vdash_{PA} (x.x=y \,\&\, x.x=y') \to y=y'$ $(T=)$

Въвеждаме нов едноместен фун/лен символ ^{2} с дефиниращата аксиома

$$x^2 = y \leftrightarrow x x = y$$

Нека $B \approx x^2 + y^2 \le (x+y)^2$

$B' \approx z_1 + y^2 \le (x+y)^2$. Имаме $B \approx B'_{z_1}[x^2]$

$B'' \approx z_1 + z_2 \le (x+y)^2$. Имаме $B' \approx B''_{z_2}[y^2]$

$B''' \approx z_1 + z_2 \le z_3$ Имаме $B'' \approx B'''_{z_3}[(x+y)^2]$

$$B^* \approx \exists z_1 (B'^* \,\&\, xx = z_1) \approx \exists z_1 (\exists z_2 (B''^* \,\&\, yy = z_2) \,\&\, xx = z_1) \approx$$

$$\approx \exists z_1 (\exists z_2 (\exists z_3 (z_1 + z_2 \le z_3 \,\&\, (x+y)(x+y) = z_3) \,\&\, yy = z_2) \,\&\, xx = z_1)$$

$$B^* \leftrightarrow \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 (z_1 + z_2 \le z_3 \,\&\, xx = z_1 \,\&\, yy = z_2 \,\&\, (x+y)(x+y) = z_3)$$

Th за $\forall$ ф/ла B в сила са

(i) $\vdash_{T'} B \leftrightarrow B^*$

(ii) Ако $\vdash_{T'} B$ то $\vdash_T B^*$

Следствие

T' е консервативно разширение на T

Искаме да въведем $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \ge y \\ 0, & x < y \end{cases}$

За разгл. ф/лата $(y \le x \to x = y + z) \,\&\, (x < y \to z = 0)$

(i) $\vdash_{PA} \exists z ((y \le x \to x = y + z) \,\&\, (x < y \to z = 0))$

① $\vdash_{PA} y \le x \to \exists z (x = y + z)$ с инд по x

(1) $\vdash_{PA} y \le 0 \to y = 0$ (N7)(ПСС)(ТТ)

(2) $\vdash_{PA} 0 = 0 + 0$ (N3)(ПСС)

(3) $\vdash_{PA} y \le 0 \to 0 = y + 0$ (1)(2)(T=)

(4) $\vdash_{PA} 0 = y + 0 \to \exists z (0 = y + z)$ аксиома

(5) $\vdash_{PA}\ y \leq 0 \to \exists z\,(0 = y+z)$ (3)(4) база на инд

(6) $\vdash_{PA}\ y \leq Sx \to (y < Sx \lor y = Sx)$

(7) $\vdash_{PA}\ y < Sx \to (y = x \lor y < x)$ (N9)(TT)

(8) $\vdash_{PA}\ y < Sx \to y \leq x$ (7)

(9) $\vdash_{PA}\ x = y+z \to Sx = S(y+z)$ (T=)

(10) $\vdash_{PA}\ S(y+z) = y + Sz$ (N8)(ПСС)

(11) $\vdash_{PA}\ x = y+z \to Sx = y + Sz$ (9)(10)(TT)

(12) $\vdash_{PA}\ x = y+z \to \exists z\,(Sx = y+z)$ (11)(A$\exists$) акс. ген.

(13) $\vdash_{PA}\ \exists z\,(x = y+z) \to \exists z\,(Sx = y+z)$ (12)(ПСС)

(14) $\vdash_{PA}\ (y \leq x \to \exists z\,(x = y+z)) \to y < Sx \to \exists z\,(Sx = y+z)$

от (8)(13)(TT)

(15) $\vdash_{PA}\ y = Sx \to Sx = y+0$ (N3)(T=)

(16) $\vdash_{PA}\ y = Sx \to \exists z\,(Sx = y+z)$ (15)(A$\exists$C)(TT)

(17) $\vdash_{PA}\ (y \leq x \to \exists z\,(x = y+z)) \to (y < Sx \lor y = Sx) \to \exists z\,(Sx = y+z)$

(14)(16)(TT)

(18) $\vdash_{PA}\ (y \leq x \to \exists z\,(x = y+z)) \to (y \leq Sx \to \exists z\,(Sx = y+z))$ (17)

от (5)(18)(N10)

$\vdash_{PA}\ y \leq x \to \exists z\,(x = y+z)$

② $\vdash_{PA}\ \exists z\,(x < y \to z = 0)$

(1) $\vdash_{PA}\ 0 = 0$ (T=)

(2) $\vdash_{PA}\ x < y \to 0 = 0$ (TT). Оттук

(3) $\vdash_{PA}\ \exists z\,(x < y \to z = 0)$. От ① $\Rightarrow$

③ $\vdash_{PA}\ \exists z\,(y \leq x \to x = y+z)$. От ② и ③ $\Rightarrow$

$\vdash_{PA}\ \exists z\,(y \leq x \to x = y+z)\ \&\ \exists z\,(x < y \to z = 0)$

$\vdash_{PA}\ \exists z\,((y \leq x \to x = y+z)\ \&\ (x < y \to z = 0))$ (защо?)

(ii) $\overbrace{((y \leq x \to x = y+z)\ \&\ (x<y \to z=0))}^{D_1}\ \&\ \overbrace{((y \leq x \to x = y+z')\ \&\ (x<y \to z'=0))}^{D_2}$

(1) $\vdash_{PA}\ (x = y+z\ \&\ x = y+z') \to y+z = y+z'$

(2) $\vdash_{PA}\ z+y = z'+y \to z = z'$ инд по y

(3) $\vdash_{PA}\ z+0 = z'+0 \to z = z'$

③

(4) $\vdash_{PA} z + Sy = S(z+y)$ (N4)
(5) $\vdash_{PA} z' + Sy = S(z'+y)$ (N4)
(6) $\vdash_{PA} S(z+y) = S(z'+y) \to z+y = z'+y$ (N2)
(7) $\vdash_{PA} (z+y = z'+y \to z = z') \to (z+Sy = z'+Sy \to z = z')$
от (3), (7) (N10) получаваме Q

③ $\vdash_{PA} (D_1 \& D_2) \to y \leq x \to z = z'$ (ОК) (Т?)
④ $\vdash_{PA} (D_1 \& D_2) \to x < y \to z = z'$
⑤ $\vdash_{PA} (D_1 \& D_2) \to (y \leq x \vee x < y) \to z = z'$
$\vdash_{PA} y \leq x \vee x < y$ (N8)
⑥ $\vdash_{PA} (D_1 \& D_2) \to z = z'$

$x \dot{-} y = z \leftrightarrow (y \leq x \to x = y+z) \& (x < y \to z = 0)$

Изнасяне на кванторите.

Т61 $\vdash_T \neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$
Док
Имаме $\vdash_T \neg\neg \exists x \neg A \leftrightarrow \exists x \neg A$ (ТП) т.е.
$\vdash_T \neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$

Т62 $\vdash_T \neg \exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$
Док
$\vdash_T A \leftrightarrow \neg\neg A$. Оттук $\vdash_T \exists x A \leftrightarrow \exists x \neg\neg A$ (ПЕ)
откъдето $\vdash_T \neg \exists x A \leftrightarrow \neg \exists x \neg\neg A$ т.е. $\vdash_T \neg \exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$

Т63 Ако x не е свободно в ф/лата B то
$\vdash_T (\exists x A \vee B) \leftrightarrow \exists x (A \vee B)$ и $\vdash_T (\forall x A \vee B) \leftrightarrow \forall x (A \vee B)$
1) $\vdash_T \exists x A \vee B \to \exists x (A \vee B)$. Имаме $\vdash_T A \to A \vee B$, $\vdash_T A \vee B \to \exists x (A \vee B)$ аксиома и следователно $\vdash_T A \to \exists x (A \vee B)$
оттук $\exists x A \to \exists x (A \vee B)$ (П∃). x не е свободно в $\exists x (A \vee B)$. Аналогично $\vdash_T B \to \exists x (A \vee B)$. Оттук
$\vdash_T (\exists x A \vee B) \to \exists x (A \vee B)$

2) $\vdash_T \exists x(A \vee B) \to (\exists x A \vee B)$. Имаме $\vdash_T A \to \exists x A$ аксиома и следователно $\vdash_T A \to (\exists x A \vee B)$. Освен това $\vdash_T B \to (\exists x A \vee B)$ и следователно $\vdash_T B \to (\exists x A \vee B)$ (T7)
Т.к. x не е свободно в T, x не е свободно в $\exists x A \vee B$ и следователно имаме $\exists x(A \vee B) \to (\exists x A \vee B)$ (П∃)

3) $\vdash_T (\forall x A \vee B) \to \forall x(A \vee B)$. Имаме $\vdash_T \forall x A \to A$ и следователно $\vdash_T \forall x A \to (A \vee B)$. Освен това $\vdash_T B \to A \vee B$ значи $\vdash_T (\forall x A \vee B \to A \vee B$. Т.к. x не е свободно в B, x не е свободно в $\forall x A \vee B$ и сл. $\vdash_T (\forall x A \vee B) \to \forall x(A \vee B)$ (П∀)

4) $\vdash_T \forall x(A \vee B) \to (\forall x A \vee B)$: Имаме $\vdash_T \forall x(A \vee B) \to A \vee B$, откъдето $\vdash_T (\exists x(A \vee B) \& \neg B) \to A$
Т.к. x не участва свободно в B и в $\forall x(A \vee B)$ оттук $\vdash_T (\forall x(A \vee B) \& \neg B) \to \forall x A$. Оттук съгласно (T7) $\vdash_T \forall x(A \vee B) \to (\forall x A \vee B)$

Следствие

Нека x не е свободно в B. Тогава

а) $\vdash_T (\exists x A \& B) \leftrightarrow \exists x(A \& B)$

б) $\vdash_T (\forall x A \& B) \leftrightarrow \exists x(A \& B)$

в) $\vdash_T (\exists x A \to B) \leftrightarrow \forall x(A \to B)$

г) $\vdash_T (\forall x A \to B) \leftrightarrow \exists x(A \to B)$

д) $\vdash_T B \to \exists x A \leftrightarrow \exists x(B \to A)$

е) $\vdash_T B \to \forall x A \leftrightarrow \forall x(B \to A)$

Док а)

$\vdash_T (\exists x A \& B) \leftrightarrow \neg(\neg \exists x A \vee \neg B)$

$\vdash_T (\exists x A \& B) \leftrightarrow \neg(\forall x \neg A \vee \neg B)$ (T62)

$\vdash_T (\exists x A \& B) \leftrightarrow \neg \forall x(\neg A \vee \neg B)$ (T63)

$\vdash_T (\exists x A \& B) \leftrightarrow \exists x \neg(\neg A \vee \neg B)$ (T61)

$\vdash_T (\exists x A \& B) \leftrightarrow \exists x(A \& B)$

б)

Деф. Казваме че ф/лата A е в пренексен вид ако $A \simeq Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n B$, където $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, $x_1 \dots x_n$ - променливи, B не съдържа квантори

Тh $\forall$ ф/ла C е еквивалентна на ф/ла в пренексен вид

Док. С индукция по построението на C

1сл C е атомарна. Тогава C е в пренексен вид ($\vdash_T C \leftrightarrow C$)

2сл C е $C_1 \vee C_2$. Нека $\vdash_T C_1 \leftrightarrow A_1$, $\vdash_T C_2 \leftrightarrow A_2$ където $A_1 \simeq Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n B_1$, $A_2 \simeq Q_{n+1} x_{n+1} \dots Q_{n+m} x_{n+m} B_2$ където B_1 и B_2 са без квантори. Поради Тh за вариантите можем да считаме че променливите $x_1 \dots x_n$ не участват в B_2, а $x_{n+1} \dots x_{n+m}$ не участват в B_1. Тогава $\vdash_T C \leftrightarrow Q_1 x_1 \dots Q_n x_n Q_{n+1} x_{n+1} \dots Q_{n+m} x_{n+m} (B_1 \vee B_2)$

3сл C е $\neg C$. Нека $\neg C \leftrightarrow A_1$ където $A_1 \simeq Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B_1$ е формула в пренексен вид. Тогава $\vdash_T C \leftrightarrow Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \neg B_1$

4сл C е $\exists x C_1$ —"— . Тогава $\vdash_T C \leftrightarrow \exists x Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B_1$