МЛ Ганчев 16.12.14

Св-ва на изоморфизмите

Лема

Нека $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ са структури на езика $\mathcal{L}$ и нека $h: |\mathcal{U}_1| \to |\mathcal{U}_2|$ е т.ч. $h(f^{\mathcal{U}_1}(\alpha_1 \dots \alpha_n)) = f^{\mathcal{U}_2}(h(\alpha_1) \dots h(\alpha_n))$ за $\forall n$ и $\forall$ n-местен функционален символ f и елементи $\alpha_1 \dots \alpha_n$ които $\alpha_1 \dots \alpha_n \in |\mathcal{U}_1|$. Тогава за всеки терм a с променливи измежду $x_1 \dots x_n$ и всеки избор на $\alpha_1 \dots \alpha_n \in |\mathcal{U}_1|$ е в сила $h(\mathcal{U}_1(a_{x_1 \dots x_n}[P_{\alpha_1} \dots P_{\alpha_n}])) \equiv$

$$\mathcal{U}_2(a_{x_1 \dots x_n}[P_{h(\alpha_1)} \dots P_{h(\alpha_n)}])$$

Означение. Ще пишем $\varphi[\vec{P_\alpha}]$ вместо $a_{x_1 \dots x_n}[P_{\alpha_1} \dots P_{\alpha_n}]$ и $\varphi[\vec{P_{h(\alpha)}}]$ вместо $\varphi_{x_1 \dots x_n}[P_{h(\alpha_1)} \dots P_{h(\alpha_n)}]$ за всеки терм или формула φ със свободни променливи измежду $x_1 \dots x_n$

Док

Индукция по построението на a

1) a е променлива x. Тогава $x \equiv x_i$ за някое $1 \le i \le n$. Тогава $h(\mathcal{U}_1(a[\vec{P_\alpha}])) \equiv h(\mathcal{U}_1(P_{\alpha_i})) \equiv h(\alpha_i) \equiv$
$$\equiv \mathcal{U}_2(P_{h(\alpha_i)}) \equiv \mathcal{U}_2(a[\vec{P_{h(\alpha)}}])$$

2) a е $fa_1 \dots a_n$ за някой n-местен функционален символ f и термове $a_1 \dots a_n$ с променливи измежду $x_1 \dots x_n$. Тогава съгласно деф. $\Rightarrow$

$$h(\mathcal{U}_1(a[\vec{P_\alpha}])) \equiv h(f^{\mathcal{U}_1}(\mathcal{U}_1(a_1[\vec{P_\alpha}]), \dots, \mathcal{U}_1(a_n[\vec{P_\alpha}]))) \equiv$$
$$\equiv f^{\mathcal{U}_2}(h(\mathcal{U}_1(a_1[\vec{P_\alpha}])) \dots h(\mathcal{U}_1(a_n[\vec{P_\alpha}]))) \equiv$$
$$\equiv f^{\mathcal{U}_2}(\mathcal{U}_2(a_1[\vec{P_{h(\alpha)}}]) \dots \mathcal{U}_2(a_n[\vec{P_{h(\alpha)}}])) \equiv \mathcal{U}_2(a[\vec{P_{h(\alpha)}}])$$

Тм Нека $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ са структури на $\mathcal{L}$ и нека $h: |\mathcal{U}_1| \to |\mathcal{U}_2|$ е изоморфизъм. Тогава за $\forall$ ф/ла A от $\mathcal{L}$ със свободни променливи измежду $x_1 \dots x_n$ и $\forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in |\mathcal{U}_1|$ в сила е
$$\mathcal{U}_1(A_{x_1 \dots x_n}[P_{\alpha_1} \dots P_{\alpha_n}]) \equiv \mathcal{U}_2(A_{x_1 \dots x_n}[P_{h(\alpha_1)} \dots P_{h(\alpha_n)}])$$

Док.

Използваме означенията от предишната задача

Индукция по A

1) A е атомарна

а) $A \simeq a_1 = a_2$. Тогава $\mathcal{U}_1(A[\overrightarrow{\varphi_\alpha}]) \equiv T \Longleftrightarrow$

$\mathcal{U}_1(a_1[\overrightarrow{\varphi_\alpha}]) = \mathcal{U}_1(a_2[\overrightarrow{\varphi_\alpha}]) \overset{h \text{ е}}{\underset{\text{инекция}}{\Longleftrightarrow}}$

$h(\mathcal{U}_1(a_1[\overrightarrow{\varphi_\alpha}])) = h(\mathcal{U}_1(a_2[\overrightarrow{\varphi_\alpha}])) \underset{\text{лема}}{\Longleftrightarrow}$

$\mathcal{U}_2(a_1[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}]) = \mathcal{U}_2(a_2[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}]) \Longleftrightarrow \mathcal{U}_2(A[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}]) \equiv T$

б) A е $p\, a_1 \dots a_n$ за някой n-местен предикатен символ p и термове $a_1 \dots a_n$ с променливи измежду $x_1 \dots x_n$. Тогава $\mathcal{U}_1(A[\overrightarrow{\varphi_\alpha}]) \equiv T \Longleftrightarrow$

$(\mathcal{U}_1(a_1[\overrightarrow{\varphi_\alpha}]) \dots \mathcal{U}_1(a_n[\overrightarrow{\varphi_\alpha}]) \in p^{\mathcal{U}_1} \overset{h \text{ е}}{\underset{\text{изомор}}{\Longleftrightarrow}}$

$(h(\mathcal{U}_1(a_1[\overrightarrow{\varphi_\alpha}])) \dots h(\mathcal{U}_1(a_n[\overrightarrow{\varphi_\alpha}])) \in p^{\mathcal{U}_2} \underset{\text{лема}}{\Longleftrightarrow}$

$(\mathcal{U}_2(a_1[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}] \dots \mathcal{U}_2(a_n[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}])) \in p^{\mathcal{U}_2} \Longleftrightarrow$

$\mathcal{U}_2(A[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}]) \equiv T$

2) A е $\neg B$. Тогава $\mathcal{U}_1(A[\overrightarrow{\varphi_\alpha}]) \equiv T \Longleftrightarrow$

$\mathcal{U}_1(B[\overrightarrow{\varphi_\alpha}]) \equiv F \underset{\text{И.П.}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{U}_2(B[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}]) \equiv F \Longleftrightarrow$

$\mathcal{U}_2(A[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}]) \equiv T$

3) A е $B \vee C$. Тогава $\mathcal{U}_1(A[\overrightarrow{\varphi_\alpha}]) \equiv T \Longleftrightarrow$

$T \in \{\mathcal{U}_1(B[\overrightarrow{\varphi_\alpha}]), \mathcal{U}_1(C[\overrightarrow{\varphi_\alpha}])\} \Longleftrightarrow$

$T \in \{\mathcal{U}_2(B[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}]), \mathcal{U}_2(C[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}])\} \Longleftrightarrow$

$\mathcal{U}_2(A[\overrightarrow{\varphi_h(\alpha)}]) \equiv T$

4) $A \simeq \exists x B$ за някоя формула B със свободни променливи измежду $x_1, \dots x_n, x$ (x не е м/у $x_1 \dots x_n$)

Нека първо $\mathcal{U}_1(A[\overrightarrow{\vartheta_\alpha}]) \equiv \text{И}$. Тогава
$\mathcal{U}_1(B[\vartheta_\alpha] \times [\vartheta_\beta]) \equiv \text{И}$ за някоя $\beta \in |\mathcal{U}_1|$. Тогава
имаме $\mathcal{U}_2(B[\vartheta_{h(\alpha)} \times [\vartheta_{h(\beta)}]) \equiv \text{И}$ за някое $\beta \in |\mathcal{U}_1|$
и от $\mathcal{U}_2(B[\vartheta_{h(\alpha)}] \times [\vartheta_\gamma]) \equiv \text{И}$ за някое $\gamma \in |\mathcal{U}_2|$. Оттук
$\mathcal{U}_2(A[\vartheta_{h(\alpha)}]) \equiv \text{И}$

Обратно. Нека $\mathcal{U}_2(A[\overrightarrow{\vartheta_{h(\alpha)}}]) \equiv \text{И}$. Оттук $\mathcal{U}_2(B[\vartheta_{h(\alpha)}] \times [\vartheta_\gamma])$
$\equiv \text{И}$ за някое $\gamma \in |\mathcal{U}_2|$. Нека $\beta \in |\mathcal{U}_1|$ е т.ч. $h(\beta) = \gamma$
(h е сюрекция). Тогава $\mathcal{U}_1(B[\vartheta_\alpha] \times [\vartheta_\beta]) \equiv_{\text{и.т.}} \text{И}$
оттук $\mathcal{U}_1(A[\vartheta_\alpha]) \equiv \text{И}$

Следствие

Нека $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ са структури на езика $\mathcal{L}$
Нека $h: |\mathcal{U}_1| \to |\mathcal{U}_2|$ е изоморфизъм. Тогава
за всяка ф/ла A от $\mathcal{L}$, $\mathcal{U}_1 \vdash A \Leftrightarrow \mathcal{U}_2 \vdash A$

Док. $\Rightarrow$

Нека $\mathcal{U}_1 \vdash A$. Нека A е със свободни промен-
ливи $x_1 \dots x_m$. Нека $\gamma_1 \dots \gamma_m \in |\mathcal{U}_2|$. Тогава
$\gamma_1 = h(\alpha_1), \dots \gamma_m = h(\alpha_m)$ за някои $\alpha_1 \dots \alpha_m \in |\mathcal{U}_1|$
(h е сюрекция). От $\mathcal{U}_1 \vdash A$ следва $\mathcal{U}_1(A[\overrightarrow{\vartheta_\alpha}]) \equiv \text{И}$
откъдето $\mathcal{U}_2(A[\vartheta_\gamma]) \equiv \text{И}$. Следователно $\mathcal{U}_2 \vdash A$

Док. $\Leftarrow$

Нека $\mathcal{U}_2 \vdash A$. Нека A е със свободни променливи
$x_1 \dots x_n$ и нека $\alpha_1 \dots \alpha_n \in |\mathcal{U}_1|$. От $\mathcal{U}_2 \vdash A$ следва
се $\mathcal{U}_2(A[\overrightarrow{\vartheta_{h(\alpha)}}]) \equiv \text{И}$. Оттук съгласно Th
$\mathcal{U}_1(A[\vartheta_\alpha]) \equiv \text{И}$ и са $\mathcal{U}_1 \vdash A$

За PA са в сила следните твърдения

1) $\vdash_{PA} H_m \neq H_n$ за $m \neq n$

2) $\vdash_{PA} SH_n = H_{n+1}$

3) $\vdash_{PA} H_n + H_m = H_{m+n}$

4) $\vdash_{PA} H_m H_n = H_{mn}$

5) $\vdash_{PA} H_n < H_m$ за $n < m$

6) $\vdash_{PA} H_n \nless H_m$ за $n \geq m$

Пример за 1)

$\vdash_{PA} H_1 \neq H_3$ т.е. $\vdash_{PA} S0 \neq SSS0$. Имаме аксиома
$Sv_0 = Sv_1 \Rightarrow v_0 = v_1$. Оттук $v_0 \neq v_1 \to Sv_0 \neq Sv_1$
Имаме $\vdash_{PA} 0 \neq SS0$ (N1) (ПСС$_n$) Оттук
$\vdash_{PA} S0 \neq SSS0$

Пример за 6)

$\vdash_{PA} H_3 \nless H_1$ т.е. $\vdash_{PA} SSS0 \nless S0$. Имаме аксиома
$v_0 < Sv_1 \leftrightarrow (v_0 = v_1 \vee v_0 < v_1)$. Оттук
$\vdash_{PA} (v_0 \nless v_1 \ \& \ v_0 \neq v_1) \to v_0 \nless Sv_1$. Освен това
$\vdash_{PA} 0 \neq SSS0$ (N1) (ПСС$_n$), $\vdash_{PA} SSS0 \nless 0$ (N6) (ПСС$_n$)
Оттук $\vdash_{PA} SSS0 \nless S0$

Нека $\mathcal{U} \models PA$ и да разгледаме $h : \mathbb{N} \to |\mathcal{U}|$
дефинирано с $h(n) \equiv \mathcal{U}(H_n)$

1) h е инекция: Нека $n \neq m$. Тогава $\vdash_{PA} H_n \neq H_m$ и сл. $\mathcal{U}(H_n \neq H_m) \equiv T$. Оттук
$h(n) \equiv \mathcal{U}(H_n) \not\equiv \mathcal{U}(H_m) \equiv h(m)$

2) $h(0) = 0$: $h(0) \equiv \mathcal{U}(H_0) \equiv \mathcal{U}(0) \equiv 0_{\mathcal{U}}$

3) $h(n+m) = h(n) +_{\mathcal{U}} h(m)$. От $\vdash_{PA} H_n + H_m = H_{n+m}$
имаме $\mathcal{U}(H_n + H_m = H_{n+m}) \equiv T$ т.е.
$\mathcal{U}(H_n) +_{\mathcal{U}} \mathcal{U}(H_m) \equiv \mathcal{U}(H_{n+m})$. Оттук
$h(n) +_{\mathcal{U}} h(m) \equiv h(n+m)$

4) $h(n.m) = h(n) \cdot_{\mathcal{U}} h(m)$

5) $h(m+1) = S_{\mathcal{U}}\, h(m)$

6) $m < n \iff h(m) < h(n)$

$\Rightarrow$ $m < n$. Тогава $\vdash_{PA} H_m < H_n$ и сл. $\mathcal{U}(H_m < H_n) \equiv И$. Сл. $\mathcal{U}(H_m) <_{\mathcal{U}} \mathcal{U}(H_n)$

$\Leftarrow$ Нека $m \not< n$. Тогава $\vdash_{PA} H_m \not< H_n$ и сл. $\mathcal{U}(H_m \not< H_n) \equiv И$ и сл. $\mathcal{U}(H_m) \not<_{\mathcal{U}} \mathcal{U}(H_n)$

Сл. h е влагане на $\mathbb{N}$ в $\mathcal{U}$

Th (компактност) Нека T е теория и Γ е мн-во от ф/ли на $\mathcal{L}(T)$. Тогава $T[\Gamma]$ е непротиворечива $\iff$ за $\forall$ крайна $\Gamma' \subseteq \Gamma$ $T[\Gamma']$ е непротиворечива

Док. $\Rightarrow$ Ако $T[\Gamma']$ е противоречива то $T[\Gamma]$ е противоречива за $\forall\, \Gamma \supseteq \Gamma'$

$\Leftarrow$ Нека $T[\Gamma]$ е противоречива. Тогава $\vdash_T \neg A_1 \vee \neg A_2 \dots \vee \neg A_n$ $(n \geq 1)$ за някои затваряния $A_1 \dots A_n$ на ф/ли $B_1 \dots B_n$ от Γ.

Нека $\Gamma' = \{B_1 \dots B_n\}$. Тогава $\vdash_{T[\Gamma']} \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n$

От друга страна $\vdash_{T[\Gamma']} B_i$ за $1 \leq i \leq n$ и значи $\vdash_{T[\Gamma']} A_i$ за $1 \leq i \leq n$. Оттук $\vdash_{T[\Gamma']} \neg A_n$ и $\vdash_{T[\Gamma']} A_n \Rightarrow T[\Gamma']$ е противоречива $\blacksquare$

Нека k е константа (0-местен ф/нен символ) и нека PA' се получава от PA, добавяйки k. Нека $\Gamma = \{k \neq H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Нека $\Gamma' \subseteq \Gamma$ е крайна и нека m е т.с. за $\forall n \geq m$ $k \neq H_n \notin \Gamma'$. Нека $\mathbb{N}_m$ означи структурата $\mathbb{N}$ за PA, в която k е интерпретирана като числото m, т.е. $\mathbb{N}_m(k) \equiv m$. Тогава

$\mathbb{N}_m \models PA$ и за $\forall n < m$,
$\mathbb{N}_m(k \neq H_n) = T$ т.к. $\mathbb{N}_m(k) = m > n \equiv \mathbb{N}_m(H_n)$
Сл. $\mathbb{N}_m \models \Gamma'$ и значи $\mathbb{N}_m \models PA'[\Gamma']$. Оттук
$T[\Gamma']$ е непротиворечива. Сл. $PA'[\Gamma']$ е
непротиворечива. (Th за компактност)
Нека $\mathbb{N}'_\infty \models PA'[\Gamma']$. Нека $\mathbb{N}'_\infty(k) = n_\infty$
Нека $\mathbb{N}_\infty$ е обединяването на $\mathbb{N}'_\infty$ до
$\mathcal{L}(PA)$. Допускаме че $h : \mathbb{N} \to |\mathbb{N}_\infty|$ е
изоморфизъм. Нека $n \in \mathbb{N}$. Тогава $n \equiv \mathbb{N}(H_n)$
и сл. $h(n) \equiv \mathbb{N}_\infty(H_n)$. Т.к. h е биекция
$n_\infty = h(s)$ за някое $s \in \mathbb{N}$. Но тогава
$n_\infty \equiv \mathbb{N}_\infty(H_s)$ и сл. $\mathbb{N}'_\infty(k = H_s) = T$
Оттук $\mathbb{N}'_\infty \not\models \Gamma$. Сл. h не е биекция