МЛ Ганчев 15.10.14

Лема – Нека $A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$ $(n \geq 2)$ е тавтология. Тогава $\vdash A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$

Доказателство

Ще докажем лемата чрез индукция по общата сложност (общия брой на логическите връзки) на ф/ите $A_1 \dots A_n$

(1) $\forall A_i$ за $1 \leq i \leq n$ е или съждителна променлива или отрицание на съждителна променлива

$$A_i \simeq \begin{cases} P_k \\ \neg P_k \end{cases}$$

Твърдим че $A_i \simeq \neg A_j$ за $1 \leq i, j \leq n$. Наистина да допуснем че $A_i \not\simeq \neg A_j$ за $\forall 1 \leq i, j \leq n$. Тогава можем да дефинираме коректна оценка на променливите чрез

$$V(P_k) = \begin{cases} \mathbb{F}, \text{ако } P_k \simeq A_s \\ \mathbb{T}, \text{ако } \neg P_k \simeq A_s \\ \mathbb{F} \text{ иначе} \end{cases}$$

Тогава $\tilde{V}(A_s) = \mathbb{F}$ за $\forall 1 \leq s \leq n \Rightarrow$ $\tilde{V}(A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n) = \mathbb{F}$ ↯. Така със сигурност $A_i \simeq \neg A_j$ за $1 \leq i, j \leq n$. Тогава $A_i \vee A_j$ е аксиома и следователно $\vdash A_i \vee A_j$. Оттук и (ОП) $\Rightarrow \vdash A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$

(2) Поне една от ф/ите $A_1, \dots A_n$ не е нито съждителна променлива, нито отрицание на съждителна променлива.

Предвид (ОП) ще считаме че A_1 е такава ф/ла

а) $A_1 \simeq B \vee C$ за някои ф/ли $B \vee C$

①

Твърдим че ф/лата $B \vee C \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ е тавтология: Нека V е оценка на променливите. Ако $\tilde{V}(A_i) = T$ за $2 \le i \le n$. Тогава тъй като $A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$ е тавтология, $\tilde{V}(A_1) = T$ т.е. $\tilde{V}(B) = T$ или $\tilde{V}(C) = T$. Но и в двата случая $\tilde{V}(B \vee C \vee A_2 \dots \vee A_n) = T$. Така $B \vee C \vee A_2 \dots \vee A_n$ е тавтология, като при това общата сложност на колекцията $B, C, A_2 \dots A_n$ е по-малка от тази на колекцията $A_1, A_2 \dots A_n$. Оттук съгласно и.п. $\vdash B \vee C \vee A_2 \dots \vee A_n \Rightarrow$ $\vdash (B \vee C) \vee A_2 \dots \vee A_n$ съгласно (ПА)

б) $A_i \cong \neg A$ за някоя ф/ла A. Т.к. A_1 не е отрицание на съждителна променлива, A не е съждителна променлива

1сл) A е $B \vee C$. Твърдим че $\neg B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ са тавтология. Нека V е оценка на променливите. Ако $\tilde{V}(A_i) = T$ за $2 \le i \le n$, то тогава $\tilde{V}(\neg B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) = \tilde{V}(\neg C \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) = T$. Нека сега $\tilde{V}(A_i) = F$ за $2 \le i \le n$. Тогава $\tilde{V}(A_1) = T$ т.е. $\tilde{V}(\neg(B \vee C)) = T \Rightarrow \tilde{V}(B) = \tilde{V}(C) = F$, откъдето $\tilde{V}(\neg B) = \tilde{V}(\neg C) = T$. Следователно $\tilde{V}(\neg B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) = \tilde{V}(\neg C \vee A_2 \dots \vee A_n) = T$. Така $\neg B \vee A_2 \dots \vee A_n$ и $\neg C \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ са тавтологии, като при това общата сложност на всяка една от колекциите $\neg B \vee A_2 \dots \vee A_n$ и $\neg C \vee A_2 \dots \vee A_n$ е по-малка от $A_1, A_2 \dots A_n$. Съгласно индукционното предположение $\vdash \neg B \vee A_2 \dots \vee A_n$ и $\vdash \neg C \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ откъдето $\vdash \neg B \vee C \vee A_2 \dots \vee A_n$ съгласно (ПЧ) и (МР)

2сл) $A \simeq \neg B$ т.е. $A_1 \simeq \neg\neg B$ за някоя ф/ла B
Твърдим че $B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ е тавтология. Нека V е оценка на променливите. Ако $\tilde{V}(A_i) = T$ за $2 \le i \le n$, тогава $\tilde{V}(B \vee A_2 \dots \vee A_n) = T$. Нека сега $\tilde{V}(A_i) = F$ за $2 \le i \le n$. Тогава $\tilde{V}(A_1) = T$ т.е. $\tilde{V}(\neg\neg B) = T$ откъдето $\tilde{V}(B) = T$ следователно $\tilde{V}(B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) = T$

Така доказахме че $B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ е тавтология което при това конюнкцията $B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ има обща сложност, по-малка от тази на конюнкцията $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

Съгласно индукционното предположение $\vdash B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ откъдето $\vdash \neg\neg B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ съгласно (ПДО)

Th (за пълнота)

Ако A е тавтология то $\vdash A$

Док

Нека A е тавтология. Тогава $A \vee A$ е тавтология. От предната лема $\vdash A \vee A$ и $\vdash A$ (ПС)

Деф

Казваме че ф/лата A е тавтологично следствие на ф/лите $A_1, \dots, A_n$, ако ф/лата $A_1 \to \dots \to A_n \to A$ е тавтология

Th (за тавтологиите

Нека A е тавтологично следствие на $A_1, \dots, A_n$ и $\vdash A_1, \vdash A_2 \dots \vdash A_n$. Тогава $\vdash A$

Док

Нека A е тавтологично следствие на $A_1, \dots, A_n$ и $\vdash A_1, \dots, \vdash A_n$. От Th за пълнотата $\vdash A_1 \to A_2 \to \dots \to A_n \to A$. Оттук $\vdash A_1$ и (MP) $\Rightarrow$ $\vdash A_2 \to A_3 \dots \to A_n \to A$. Оттук $\vdash A_2$ и (MP) $\Rightarrow$ $\vdash A_3 \to A_4 \dots \to A_n \to A$ ... т.н. до $\vdash A_n \to A$ оттук $\vdash A_n$ и (MP) $\Rightarrow$ $\vdash A$

$(A \& B) \to A$ е тавтологично следствие

4