Мл Ганчев 13.01.15

Деф Нека $(X, \leq)$ е частично наредено мн-во. Ще казваме че $(X, \leq)$ е добре наредено, ако всяко непразно подмн-во на X, $Y \subseteq X$, има най-малък елемент, т.е. $\exists y \in Y$, т.ч. за $x \in Y$, $y \leq x$

Пр 1) $(\mathbb{N}, \leq)$

2) Нека $(X \leq)$ е добре наредено. Нека за $x \in X$ с $\overleftarrow{x} = \{z \in X \mid z < x\}$ (начален отрез от x -

$(\overleftarrow{x}, \leq)$ е добре наредено

3) $\emptyset$ е добре наредено

Тв Нека $(X \leq)$ е добре наредено. Тогава $(X, \leq)$ е линейно наредено, т.е. за $\forall x, y \in X$, $x \leq y$ или $y \leq x$

Док

Нека $x, y \in X$. Тогава $Y = \{x, y\}$ е непразно мн-во. на X и значи има най-малък елемент. Оттук $x \leq y$ или $y \leq x$

Деф Нека $(X, \leq)$ е частично наредено мн-во и $f : X \to X$. Казваме че f е строго монотонно растяща, ако от $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Тв Нека $(X, \leq)$ е добре наредено и $f : X \to X$ е строго монотонно растяща. Тогава $x \leq f(x)$ за $\forall x$

Док

Да допуснем че $Y = \{x \mid f(x) < x\} \neq \emptyset$. Нека x_0 е най-малкият елемент на Y. Тогава $x_0 > f(x_0) \notin Y$ и от $f(x_0) = y \leq f(y)$. Оттук и строгостта на f имаме $y < f(y) < f(x_0) = y$ $(y < x_0)$ т.е. $y < y$ ↯

Сл $Y = \emptyset$

Следствие

Нека $(X, \le)$ е добре наредено и $f: X \to X$ е автоморфизъм т.е. f е биекция и $x \le y \Leftrightarrow f(x) \le f(y)$. Тогава $f = id_X$ т.е. $f(x) = x$ за $\forall x \in X$

Док

Нека $f: X \to X$ е автоморфизъм. Тогава f е строго монотонно растяща. Наистина от $x < y$ следва $f(x) \le f(y)$ и от инективността на f ($f(x) \ne f(y)$, $x \ne y$) получаваме $f(x) < f(y)$ Сл $x \le f(x)$ за $\forall x \in X$

Изображението f^{-1} е също автоморфизъм и сл $x \le f^{-1}(x)$ за $\forall x$. От това че f запазва наредбата и $x \le f^{-1}(x)$ имаме $f(x) \le f(f^{-1}(x)) = x \le$
$\le f(x)$ и сл $f(x) = x$

Th Нека $(X, \le)$ е добре наредено и $x \in X$. Тогава $(X, \le)$ не е изоморфно на $(\overleftarrow{x}, \le)$ т.е.
$(X, \le) \not\cong (\overleftarrow{x}, \le)$

Док

Допускаме че $(X, \le) \cong (\overleftarrow{x}, \le)$ и нека $f: X \to \overleftarrow{x}$ е т.ч. f е биекция и $y \le z \Leftrightarrow f(y) \le f(z)$, $\forall y, z \in X$
Тъй като $\overleftarrow{x} \subseteq X$, $f: X \to X$ и f е строго монотонно (f е инективна) и сл $y \le f(y)$ за $\forall y \in X$. В частност $x \le f(x)$, но $f(x) \in \overleftarrow{x} = \{z \mid z < x\}$ и сл $f(x) < x$ ↯

Th Нека $(X_1, \le_1)$ и $(X_2, \le_2)$ са добре наредени. Вярно е точно едно от следните твърдения:

1) $(X_1, \le_1) \cong (X_2, \le_2)$
2) $(X_1, \le_1) \cong (\overleftarrow{x_2}, \le_2)$ за някое $x_2 \in X_2$
3) $(\overleftarrow{x_1}, \le_1) \cong (X_2, \le_2)$ за някое $x_1 \in X_1$
4) $(\overleftarrow{x_1}, \le_1) \cong (\overleftarrow{x_2}, \le_2)$ за някои $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$

Док

Нека $F = \{(x_1,x_2) \mid (\overleftarrow{x_1}, \le_1) \cong (\overleftarrow{x_2}, \le_2)\}$

а) $(x_1,x_2),(x_1,x_2')\in F \Rightarrow x_2 = x_2'$

Нека (x_1,x_2) и $(x_1,x_2')\in F$. Тогава $(\overleftarrow{x_1},\le_1)\cong(\overleftarrow{x_2},\le_2)$ и $(\overleftarrow{x_1},\le_1)\cong(\overleftarrow{x_2'},\le_2)$ ($f:\overleftarrow{x_1}\to\overleftarrow{x_2}$ и $f':\overleftarrow{x_1}\to\overleftarrow{x_2'}$ са изоморфизми). Допускаме че $x_2\ne x_2'$. Тогава без ограничение считаме че $x_2<x_2'$. Тогава $\overleftarrow{x_2}$ е начален отрез на $\overleftarrow{x_2'}$. От друга страна $(\overleftarrow{x_2},\le_2)\cong(\overleftarrow{x_2'},\le_2) \Rightarrow$ ↯ са $x_2 = x_2'$

б) $(x_1,x_2)\in F$ и $(x_1',x_2)\in F$ то $x_1=x_1'$ - аналогично

Нека $E_1 = \{x_1\in X_1 \mid \exists x_2\in X_2\,((x_1,x_2)\in F)\}$ и
$E_2 = \{x_2\in X_2 \mid \exists x_1\in X_1\,((x_1,x_2)\in F)\}$

в) $E_1 = X_1$ или $E_1 = \overleftarrow{u_1}$ за някое $u_1\in X_1$

Да забележим че $y_1\in E_1$ и $z_1<y_1$, то $z_1\in E_1$. Наистина ако $y_1\in E_1$ то $(y_1,y_2)\in F$ за някое $y_2\in X_2$ и са $(\overleftarrow{y_1},\le_1)\cong(\overleftarrow{y_2},\le_2)$. Нека $f:\overleftarrow{y_1}\to\overleftarrow{y_2}$ е изоморфизъм. Нека $z_1<y_1$. Тогава $z_1\in\overleftarrow{y_1}$ и са $(\overleftarrow{z_1},\le_1)\cong(\overleftarrow{f(z_1)},\le_2)$. Оттук $(z_1,f(z_1))\in F$ и значи $z_1\in E_1$

Да предположим че $E_1\ne X_1$. Тогава множеството $\{y_1\in X_1\mid y_1\notin E_1\}\ne\emptyset$ и нека u_1 е най-малкият елемент на това множество. Тогава $\overleftarrow{u_1}\subseteq E_1$. Нека сега $x_1\in E_1$. Допускаме че $x_1\notin\overleftarrow{u_1}$, т.е. $u_1\le x_1$. Тогава $u_1<x_1\in E_1$ или $u_1=x_1\in E_1$ и значи $u_1\in E_1$ $\Rightarrow$ ↯ са $x_1\in\overleftarrow{u_1}$ и значи $E_1\subseteq\overleftarrow{u_1}$. Оттук $E_1=\overleftarrow{u_1}$

г) $E_2 = X_2$ или $E_2=\overleftarrow{u_2}$ за някое $u_2\in X_2$ - Аналогично

От в) и г) $\Rightarrow$ възможни са следните 4 ситуации

1) $E_1 = X_1$, $E_2 = X_2$: $f : X_1 \to X_2$ дефинирано с
$f(x_1) = x_2 \iff (x_1, x_2) \in F$ е изоморфизъм
2) $E_1 = \overset{*}{U}_1$, $E_2 = X_2$: $f : \overset{*}{U}_1 \to X_2$ дефинирано с
$f(x_1) = x_2 \iff (x_1, x_2) \in F$ е изоморфизъм
3) $E_1 = X_1$, $E_2 = \overset{*}{U}_2$. $f : X_1 \to \overset{*}{U}_2$ дефинирано с
$f(x_1) = x_2 \iff (x_1, x_2) \in F$ е изоморфизъм
4) $E_1 = \overset{*}{U}_1$, $E_2 = \overset{*}{U}_2$: $f : \overset{*}{U}_1 \to \overset{*}{U}_2$ дефинирано с
$f(x_1) = x_2 \iff (x_1, x_2) \in F$ е изоморфизъм
и следователно $(\overset{*}{U}_1, \le_1) \cong (\overset{*}{U}_2, \le_2)$ откъдето
$(u_1, u_2) \in F$. Оттук $u_1 \in E_1 = \overset{*}{U}_1$, $u_2 \in E_2 = \overset{*}{U}_2$ т.е.
$u_1 < u_1$, $u_2 < u_2 \Rightarrow$ ↯

Деф. Казваме че множеството X е транзитивно ако от $x \in X \Rightarrow x \subseteq X$
Пример ① $\emptyset$, ② $\{\emptyset\}$, ③ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Деф Казваме че множеството X е ординално и пишем $\mathrm{Ord}\, X$, ако X е транзитивно и добре наредено по отношение на $\in$
Пример $\emptyset = 0$

Тв) Нека X е ординал. Тогава $S(X) = X \cup \{X\}$ е ординал
Док
$S(X)$ е транзитивно. Нека $x \in S(X)$
1сл) $x \in X$ -
т.к. X е ординал $x \subseteq X \subseteq S(X)$
2сл) $x = X$. Тогава $x = X \subseteq X \subseteq S(X)$. $S(X)$ е добре наредено по отношение на $\in$. Нека $Y \subseteq X \cup \{X\}$ и нека $Y \neq \emptyset$. Нека $Y_1 = Y \cap X$
Ако $Y_1 = \emptyset$ тогава $Y = \{X\}$ и има най-малък елемент x_0 по отношение на $\in$

т.е. за $\forall x \in Y$, $x_0 \in X$ или $x_0 = x$. Т.к. $Y_0 \subset X$
$x_0 \in X \Rightarrow x_0$ е най-малкият елемент в Y

Пример $0 = \emptyset$, $1 = S(0) = \{0\} = \{\emptyset\}$

$2 = S(1) = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ...

$n+1 = S(n) = \{0, 1 \dots n\}$

Крайни ординали

Означение: Ако $Ord(\alpha)$ и $Ord(\beta)$ пишем
$\alpha < \beta$ вместо $\alpha \in \beta$

5